

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

33. Band, Heft 8/9

5. Juni 1950

S. 337—432

Geschichte.

Carruccio, E.: Bagliori di pensiero matematico al tramonto del Mondo Antico. Archimedè, Firenze 1, 177—180 (1949).

Verf. möchte mit Augustinus den Beginn einer neuen Periode der Mathematikgeschichte ansetzen und begründet das mit der Einstellung des Augustinus zu den Zahlen, zum Aktual-Unendlichen und zur Bedeutung der Zeichen für die Erkenntnis.

Gericke (Freiburg i. Br.).

Loria, Gino: Perfectionnements, évolution, métamorphoses du concept de „coordonnées“. Osiris, Bruges 8, 218—288 (1948).

Con la ricchezza d'informazioni che gli è propria, l'A. traccia un suggestivo quadro dello svolgimento e delle successive trasformazioni dei concetti che si collegano alle coordinate. Lo studio fa seguito ad altro pubblicato nel 1924 [Mem. Accad. naz. Lincei, Cl. Sci. fisic. mat. natur., V. S. 14, 777—845 (1924)], nel quale la storia delle coordinate è ricostruita per il periodo iniziale: da Descartes e Fermat a Monge e Lagrange. Ora vengono esposti i perfezionamenti e gli ulteriori sviluppi, in un ampio quadro che abbraccia tutto il XIX secolo. S'incontrano nomi grandi e grandissimi, accanto a quelli di un gran numero di studiosi più modesti, che portano tutti il loro contributo all'edificio, che sorge da prima con relativa lentezza, nella necessità di solidificare le basi e di vincere dubbi ed incertezze, ma che poi si eleva rapido ad altezze sempre maggiori, dominando vasti e disparati orizzonti. È interessante per il lettore poter legare ad un nome risultati che l'uso comune fa apparire quasi senza paternità; o seguire, da un autore all'altro, i perfezionamenti dei mezzi dai quali, a poco a poco, nascono nell'agilità attuale formule ed algoritmi ormai a tutti familiari. — Significativa appare l'opera di pensiero che porta dalle coordinate cartesiane ad altri tipi — come le generali proiettive, le plückeriane, le baricentriche, le polari, ecc. — o che, facendo nascere nuove esigenze, conduce alla ricerca di più adeguati mezzi di rappresentazione: dalle coordinate curvilinee e dal calcolo geometrico del Grassmann e del Peano, fino ai più recenti procedimenti del calcolo differenziale assoluto del Ricci e del Levi-Civita. — Dell'ampio e denso studio non è possibile dare più precise indicazioni, anche perchè in esso domina talvolta l'esame analitico sulla visione sintetica: ciò era negli scopi dell'A., che — concludendo con questa le altre sue precedenti ricerche — mira a dare un panorama completo della letteratura geometrica che ha fatto seguito alla classica „Géométrie“ del Descartes. Nel susseguirsi delle opere è indagato acutamente il progresso del pensiero, anche nei più piccoli passi, cosicchè rivive in queste pagine la quotidiana fatica degli studiosi, che segna il costante progredire della Scienza. — Il pregevole lavoro, pronto fino dal 1939, appare con notevole ritardo: ma non gliene viene danno, poichè, essendo limitato al secolo scorso e agli indirizzi classici, gli sono estranei i recenti orientamenti a proposito delle coordinate, in senso lato ed astratto.

Campedelli (Firenze).

Vries, H. De: How analytic geometry became a science. Scripta math., New York 14, 5—15 (1948).

Secondo l'A., la „Geometria analitica“ acquista il rango e la portata di una scienza soltanto al principio del secolo decorso, per merito principalmente di due fattori; il primo dei quali è la reazione provocata (soprattutto nel Gergonne) dalla eccessiva valorizzazione che il Poncelet faceva dei procedimenti sintetici. L'altro elemento propulsore dello sviluppo dei metodi inaugurati dal Descartes, va invece ricercato nel notevole contributo che ad essi ha portato il Lamé. — Nel 1600, subito dopo la pubblicazione della „Géométrie“ del Descartes (1637) e della „Ad locos planos et solidos isagoge“ del Fermat, apparsa postuma nel 1679, i matematici del tempo — fra i quali s'incontrano l'Huygens, il Leibniz, il De Sluse, il Van Schooten, ed altri (e l'elenco dell'A. richiede qualche completamento) — vollero l'opera loro soprattutto a ricercare i vantaggi che dall'uso delle coordinate potevano venire al „calcolo infinitesimale“, che stava allora nascendo. Risultati di un carattere più generale, e più apertamente orientato verso lo studio degli enti geometrici, s'incontrano nel secolo successivo, e sono dovuti nella maggior parte a M. A. Clairaut, G. Cramer e G. Monge. Si giunge così al XIX secolo, nei primi decenni del quale il Poncelet, creatore della „Geometria proiettiva“, nega al metodo delle coordinate la possibilità di trattazioni generali, e provoca il risentimento del Gergonne, che, nei suoi Annales de Mathématiques pures et appliquées, affronta la risoluzione analitica del classico problema di Apollonio e di altre note questioni, dando motivo a polemiche feconde di risultati, come quelle che nasceranno a proposito della „legge della dualità“ del

Gergonne e del „principio delle polari reciproche“ del Poncelet. Si allargano così gli orizzonti, e, a dare sviluppo e consentire l'affermarsi della nuova disciplina, vengono i contributi di molti altri, tra cui, in primo piano, il Plücker, il Lamé e il Bobiller. L'A. richiama soprattutto l'attenzione sul secondo di essi, che ha il merito di aver messo in luce l'importanza della operazione della combinazione lineare, la quale non solo dava una immediata risposta a domande che erano state causa di incertezza — come quelle nate dal ben noto paradosso del Cramer — ma consentiva anche, allo stesso Lamé ed al Gergonne, di affermare principi ricchi di applicazioni e di notevole potenza orientativa. Piace qui ricordare che l'opera dal Lamé ha già avuto da tempo in Italia quella giusta valorizzazione che merita negli ormai classici trattati di F. Enriques, dedicati alla geometria delle curva algebriche. *Campedelli* (Firenze).

● **Čebyšev (Tschebyscheff), P. L.: Gesammelte Werke. Bd. I, II, III.** Moskau: Verlag d. Akad. d. Wiss. d. USSR 1947/48. 342, 520, 412 S. R. 23,-; 32,-; 30,-. [Russisch].

Der erste Band enthält zunächst nach einer kurzen biographischen Einleitung die umfangreiche Veröffentlichung „Theorie der Kongruenzen“ (autorisierte deutsche Übersetzung Berlin 1888) mit ihrem Tabellenanhang, ferner sieben weitere Arbeiten Tschebyscheffs zur Zahlentheorie. Beigefügt ist eine Note von A. A. Markoff [C. r. Acad. Sci., Paris **120**, 1032—1034 (1895)], in der ein Satz von Tschebyscheff bewiesen wird, und einige Kommentare von A. Gelfond und B. Delone. Der zweite und dritte Band enthalten die zahlreichen Arbeiten zur Analysis in der Reihenfolge des Erscheinens (Bd. II 28 Arbeiten von 1843—1867, Bd. III 22 Arbeiten von 1868—1894). Eine Reihe der Noten sind kommentiert von N. I. Achieser, S. N. Bernstein, V. V. Golubev, V. L. Gončarov, A. N. Kolmogorov. — Das Gesamtwerk soll fünf Bände umfassen. *W. Hahn* (Berlin).

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Schouten, J. A.: Über die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Physik in den letzten 40 Jahren. Euclides, Groningen **24**, 265—282 (1949) [Holländisch].

Verf. weist auf den Zusammenhang der reinen Mathematik und der Physik hin. Besonders in den letzten Dezennien gibt es treffende Beispiele. Die mathematischen Hilfsmittel, welche die Physiker für die Durchführung ihrer Theorien brauchen, finden sie öfters schon ganz fertig ausgebildet. Umgekehrt werden die Entwicklungen der Mathematik nicht selten stimuliert durch den Fortschritt der Physik. Verf. vermutet, daß dieser Zusammenhang so tief geht, daß von jedem Gebiet der Mathematik, das mit großem Schwung angegriffen und bearbeitet ist, zu erwarten ist, daß einmal die Physik oder allgemeiner die angewandte Wissenschaft diese Mathematik benutzen wird. *J. Haantjes* (Leiden).

Engelhardt, Wolf von: Symmetrie. Studium gen., Berlin **2**, 203—212 (1949).

Verf. gibt eine schöne Einführung in den Begriff der (geometrischen) Symmetrie. Mit seiner Hilfe „ergreift der Mensch Besitz von denjenigen Bereichen der Wirklichkeit, die er zu fassen vermag; denn nur soweit es Wiederholungen von Gleichem, d. h. Symmetrien gibt, ist die Welt begreifbar und eigentlich menschliche Umwelt. Außerhalb dieses Lichtkreises liegt das Nicht-Begreifbare“. Den üblichen Streifen-, Ebenen- und Raumsymmetrien fügt Verf. noch die Zylindersymmetrien, d. h. die Schraubungen, hinzu. Zum Schluß werden die Streifenornamente mit geometrischen Skizzen und mit Ornamenten an griechischen Vasen anschaulich gemacht. *Speiser*.

Wolf, Karl Lothar: Symmetrie und Polarität. Studium gen., Berlin **2**, 213—224 (1949).

Die Streifenornamente, wie sie in der Gruppentheorie abgeleitet werden, bilden auch für die Botanik und die Zoologie wichtige Figuren, nur muß man neben der exakten Wiederholung (Isomorphie) auch die ähnliche Wiederholung in abnehmendem Maßstab (Homöomorphie) mitberücksichtigen. Verf. gibt eine große Zahl schöner Bilder aus der Mathematik, der Ornamentik und der Natur, sowie eine Aufzählung der einseitigen und zweiseitigen Symmetriegruppen. *Speiser* (Zürich).

● **Beth, Evert W.: Philosophie der Mathematik.** (Philosophische Bibliothek.) Zweite, völlig neu bearbeitete Aufl. Antwerpen: Standaard-Boekhandel; Nijmegen: Dekker en van de Vegt 1948. 387 S. [Holländisch].

Verf., Professor an der Universität Amsterdam, hat schon eine Reihe von Büchern und Abhandlungen über die Grundlagen der Mathematik veröffentlicht. Im Vorwort zu dem vorliegenden Werk schildert er die Entwicklung seiner eigenen philosophischen Anschauungen im Hinblick auf die mathematische Grundlagenforschung. Er stand ursprünglich auf dem Boden der kritischen Philosophie Kants, hat sich aber im Laufe der Jahre überzeugt, daß diese Philosophie nicht der einzige und sicher nicht der geeignetste Ausgangspunkt ist für eine philosophische Diskussion über die Grundlagen der Mathematik. Damit war allerdings noch kein Gesichtspunkt gewonnen, der es erlaubt hätte, in dem Meinungsstreit auf dem Gebiet der Philosophie der Mathematik Partei zu ergreifen. Infolgedessen hatte er sich in der ersten Auflage dieses Werkes einer übertriebenen Objektivität befleißigt. In dieser zweiten Auflage vertritt er die Auffassung, daß das Grundlagenproblem der Mathematik als eine wissenschaftstheoretische Frage anzusehen ist und daß die bestehenden tiefergehenden Meinungsverschiedenheiten ihren Grund haben in dem Fehlen einer dem heutigen Stand der wissenschaftlichen Forschung angepaßten Wissenschaftstheorie, in dem Festhalten an der veralteten Wissenschaftslehre des Aristoteles und an Auffassungen und Problemstellungen, die nur aus dieser Lehre ihre Rechtfertigung und ihren Sinn herleiten. Daraus ergibt sich für ihn die Forderung einer neuen Wissenschaftslehre. — Den Ausgangspunkt seiner Betrachtungen bildet stets eine objektive Darstellung der für die Gegenwart kennzeichnenden und für die philosophische Betrachtung wichtigsten mathematischen und logischen Theorien. Auf diese Weise wird der Leser zugleich mit diesen Theorien bekanntgemacht. Vollständigkeit wird zwar nicht erstrebt, aber der Gegenstand ist ziemlich ausführlich (und nicht nur für Mathematiker) dargestellt, so daß die verschiedenen Gesichtspunkte der mathematisch-philosophischen Forschung zu ihrem Recht kommen. Die in der ersten Auflage enthaltenen Abschnitte über die Geometrie fehlen; sie sollen in einem besonderen Werk über philosophische Raumlehre behandelt werden. Die Darstellung versucht, möglichst mathematische Strenge zu erreichen. Der Leserkreis, für den das Buch bestimmt ist, zwang jedoch in dieser Hinsicht zu gewissen Beschränkungen. — Das Werk ist in sechs Abschnitte eingeteilt. Der erste Abschnitt enthält eine Einleitung, in der der Verf. die Grundzüge der aristotelischen Wissenschaftslehre darlegt und auf die wissenschaftstheoretischen Konsequenzen der modernen Entwicklung der Mathematik hinweist, sowie ein Kapitel über die vollständige Induktion und die Definition durch Abstraktion. Der zweite Abschnitt handelt von den Grundlagen der Algebra und der Analysis (Erweiterung des Zahlbegriffs und Lehre von der natürlichen Zahl). Im dritten Abschnitt werden die symbolische Logik, D. Hilberts Beweistheorie, die Syntax im Sinne von R. Carnap unter Verwendung der Arithmetisierungsmethode von A. Tarski und K. Gödel sowie die Tarskische Semantik kritisch dargestellt. Der vierte Abschnitt bringt die verschiedenen Theorien über die Existenz der mathematischen Größen (Logizismus, Mengenlehre, Intuitionismus). Der fünfte Abschnitt handelt von den Paradoxien und der letzte enthält eine psychologische Betrachtung des mathematischen Denkens, bei der es nicht um die formale Struktur, sondern um den psychischen Inhalt der Mathematik geht; sie wird besonders von der in Holland entstandenen signifikanten Bewegung gepflegt. In einem vorwiegend philosophisch gehaltenen Schlußwort wird die Frage untersucht, ob die mathematischen Sätze eine Beziehung zur Wirklichkeit haben. — Jedes Kapitel ist mit Literaturnachweisen versehen. Am Schluß des Werkes findet sich eine zwanzig Seiten umfassende vielseitige Bibliographie. Ein Sach- und ein Namensverzeichnis erleichtern die Benutzung des Werkes, das klar geschrieben und vom mathematischen und philosophischen Standpunkt aus gleich inhaltsreich und originell ist. *E. Löffler.*

● **Frege, Gottlob: Aritmetica e logica.** (Biblioteca di Cultura scientifica, Bd. 18) Torino: Giulio Einaudi 1948. 269 p.

Freges „Grundlagen der Arithmetik“ von 1884 sind eines der seltenen Meisterwerke der Forschung, auf welche das Alter nicht einzuwirken scheint. Die in ihnen enthaltene Analysis des Anzahlbegriffs und die in ihnen aus der „Begriffsschrift“ von 1879 reproduzierte Konzeption der *R*-Ketten, die dann noch einmal ein Hauptstück des Dedekindschen Zahlenbüchleins von 1888 geworden ist, sind in den eisernen Bestand der mathematischen Grundlagenforschung eingegangen. Es kommt hinzu, daß in diesem Falle auch die Art der Darstellung so mustermäßig ist, daß sie noch nicht überholt ist. Man kann sich anders ausdrücken als Frege; aber man wird sich auch heute noch nicht besser oder präziser ausdrücken können. — Die vorliegende italienische Übersetzung ist von einem genauen und gründlichen Kenner der Materie verfaßt. Jedem der fünf Kapitel ist eine kurze, gut unterrichtende Inhaltsangabe vorausgeschickt. Die gelegentlichen Anmerkungen des Übersetzers heben die wichtigsten Punkte auf eine erwünschte und angemessene Art hervor. Der Breslauer Verlag von M. und H. Markus, in welchem 1934 ein Neudruck erschienen ist, ist ein Opfer des Krieges geworden. Die vorliegende Übersetzung ist also z. Z. der einzige greifbare Text dieses Werkes. — Sehr verdienstlich ist die Übersetzung der wichtigen zusätzlichen Stücke: „Gegenstand und Begriff“ (mit den fast unbekannt geblie-

benen wertvollen Ergänzungen aus der Fregeschen Abhandlung über das Trägheitsgesetz), „Sinn und Bedeutung“ [hiervon jetzt auch eine englische Übersetzung von M. Black, Philos. Rev., New York 57, 207—230 (1948)] und die klassische Vorrede zum ersten Bande der „Grundgesetze der Arithmetik“ von 1893. Ich weiß nicht, wer die Bemerkung gemacht hat, daß es Menschen gibt, die posthum geboren werden. Auf Frege trifft sie in einem denkwürdigen Sinne zu.

Heinrich Scholz (Münster).

Dingler, Hugo: Betrachtungen zur Axiomatik. Methodos, Milano 1, 1—21 und engl. Übersetzung 22—33 (1949).

Das methodische Denken der Griechen, dessen Einsetzen Verf. schon bei Hesiod nachweist, hat zur Erfindung von Wissenschaft als eines „hypothetisch-deduktiven“ Systems (HD-System) von Aussagen am Musterbeispiel der Geometrie geführt. Seit dieser Zeit blieb jedoch die Aufgabe ungelöst, die Herstellung von HD-Systemen als zweckmäßige Handlung zu begreifen — statt bloß nachzuahmen. Verf. erörtert die wichtigsten methodischen Regeln, vor allem die Beachtung der „logischen Ordnung“, allgemeiner der „pragmatischen Ordnung“. Scheinlösungen des Begründungsproblems, wie das Gerede von „impliziten Definitionen“ werden geklärt. Nach den bekannten Arbeiten des Verf. lassen sich die geometrischen Axiome ableiten aus „methodischen Definitionen“, die die manuellen geometrischen Formungen beschreiben.

Lorenzen (Bonn).

Vaccarino, Giuseppe: Le proposizioni quasi-analitiche. Methodos, Milano 1, 109—125 und engl. Übersetzung 126—136 (1949).

Die Arbeit gehört dem Gebiet der Semantik an, d. h. der Theorie der Beziehungen zwischen Zeichen und Objekten. Verf. beschäftigt sich mit einem logischen Problem der Sprachanalyse. Er hat sich die Aufgabe gestellt zu zeigen, daß wir in den gewöhnlichen Sprachen nicht nur synthetische und analytische Urteile, d. h. nach der Ausdrucksweise von R. Carnap *F*-wahre oder *F*-falsche bzw. *L*-wahre oder *L*-falsche Aussagen benutzen, sondern daß noch ein dritter Typus von Aussagen vorkommt, die von den Definitionen für die beiden andern nicht erfaßt werden. Er nennt sie quasi-analytische oder *F*-analytische Urteile. Sie erinnern in mancher Beziehung ein wenig an die synthetischen Urteile a priori Kants, unterscheiden sich aber von diesen doch wesentlich. Verf. geht aus von den Definitionen, die R. Carnap für die *L*-wahren und *F*-wahren Aussagen gegeben hat. Indem er nun zwischen beschreibenden und operativen Definitionen unterscheidet, gelangt er zu neuen Definitionen für jene Aussagen, die in ihren Konsequenzen zu den *F*-analytischen Urteilen führen. Er gibt in formalisierter Sprache eine Definition dieser Urteile, nachdem er sie an einfachen Beispielen erläutert hat. Sodann wird die Axiomatik der quasi-analytischen Aussagen behandelt, und schließlich wird gezeigt, daß dieser Typus von Aussagen für die operative Definition der sog. physikalischen Gesetze von Bedeutung ist. Bei diesen unterscheidet Verf. *F*-analytische Gesetze, die in gewissen Sprachen a priori wahr sind (z. B. das Trägheitsprinzip) und *F*-wahre oder synthetische Gesetze, die in einer gewissen Sprache stets hypothetisch sind (z. B. das Newtonsche Gesetz). Den Abschluß bildet eine kurze Analyse des Kausalgesetzes unter Verwendung der neu gebildeten Begriffe. — Auf den italienischen Text folgt eine vom Verf. durchgesehene vollständige und getreue englische Übersetzung.

E. Löffler (Stuttgart).

Carruccio, Ettore: Sull' impossibilità di esprimere integralmente in simboli un sistema ipotetico-deduttivo. Atti Soc. Natur. Mat., Modena, VI. S. 78, 91—92 (1947).

Carruccio, Ettore: Il problema dell'esprimibilità in simboli di un sistema ipotetico-deduttivo. Sigma, Roma 2, 357—367 (1948).

Eine vollständige, symbolische Axiomatisierung eines Systems *S*, inklusive der logischen Regeln, nach denen man in *S* operieren kann, wird für unmöglich gehalten, indem diese Vorgangsweise als Zirkelschluß angesehen wird. — Die zweite Abhand-

lung ist ausführlicher und durch einen Gedankenaustausch zwischen Verf. und Vaccarino vervollständigt.

Bruno de Finetti (Trieste).

Carruccio, Ettore: Alcune conseguenze di un risultato del Gödel e la razionalità del reale. Atti Soc. Natur. Mat., Modena, VI. S. 78, 88—90 (1948).

Als Ergänzung früherer Abhandlungen wird der vom Verf. vorgeschlagene synthetische Beweisgedanke für das Gödelsche Theorem auch zum Beweis von dessen Korollar (wenn in S die Widerspruchsfreiheit von S selbst beweisbar ist, so ist S widerspruchsvoll) angewandt. Weitere Betrachtungen.

Bruno de Finetti.

Specker, Ernst: Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. J. symbolic Logic 14, 145—158 (1949).

Der Begriff der „konstruktiven Beweisbarkeit“ wird dadurch definiert, daß

1. zum Beweis einer Existenzaussage das Tertium non datur nicht zugelassen wird,
2. Prädikate und Funktionen mit Hilfe rekursiver bzw. berechenbarer zahlentheoretischer Funktionen definiert werden (vgl. z. B. Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik). Mit Hilfe der Kleeneschen Konstruktion rekursiver Prädikate $\mathfrak{A}(m, n)$, für die $(E x) \mathfrak{A}(m, x)$ kein berechenbares Prädikat ist, sowie eines neuen, ähnlichen Hilfssatzes wird u. a. bewiesen: 1. Es gibt eine rekursive Folge $\Phi(n)$ von rationalen Zahlen, die monoton und beschränkt ist, aber für die $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n)$ keine berechenbare reelle Zahl ist. 2. Es gibt eine rekursive stetige reelle Funktion $f(x)$ und rationale Zahlen a, b mit $f(a) = -1$, $f(b) = +1$, aber $f(x) \neq 0$ für jede rekursive reelle Zahl x .

Lorenzen (Bonn).

Algebra und Zahlentheorie.

Allgemeines. Kombinatorik:

● **Lietzmann, Walter:** Sonderlinge im Reich der Zahlen. Bonn: Ferd. Dümmlers Verlag 1948. 175 S. mit 5 Figuren, 6.—DM.

Le qualificatif que W. Lietzmann donne au sujet traité: Sonderlinge im Reich der Zahlen, s'applique aussi bien au livre lui-même. Dans l'ensemble des ouvrages mathématiques qui paraissent, son petit livre est en effet une originalité charmante. Il sera lu avec plaisir et intérêt par le mathématicien aussi bien que par l'intellectuel qui a seulement le goût des chiffres et des mathématiques. Mr. Lietzmann définit avec la même simplicité et la même verve claire et facile, qui baignent tout son exposé, dès le début de sa préface, le but qu'il s'est proposé en écrivant son ouvrage. „Il y a des hommes, dit-il, beaucoup plus qu'on ne pense, qui trouvent du plaisir dans les originalités et il y a des nombres et des compositions de nombres qui sont pour leur propre compte aussi des bizarreries, ces bizarreries dans les nombres sont également plus nombreuses qu'on ne le croit généralement. Ce petit livre veut simplement mettre en contact ces hommes et ces nombres“. — Et il poursuit ainsi: „Il n'est pas du tout nécessaire d'être un mathématicien pour celui qui veut approfondir ma collection d'exemples, pour celui qui veut par là acquérir, le sentiment que même des choses aussi arbitraires que les chiffres ont de l'humeur, etc.“. — Il m'est maintenant bien difficile de donner un aperçu même restreint de la richesse en détails du contenu de l'ouvrage, autrement que par la simple énumération des titres des treize chapitres, égaux en importance et en matière, qui le constituent. Ces chapitres successifs sont intitulés: le nombre comme individu, additions et soustractions, produits, puissances (carrés, cubes et bicarrés, sommes et différences en liaison avec les puissances), divisions, nombres premiers, représentations du nombre 100, petites monographies de petits nombres (les nombres 2 et 5 et leurs multiples, les nombres 3 et 9 et leurs multiples, le nombre 7, le nombre 11, les nombres 13 et 17), le nombre 12 et le système duodécimal, les fractions continues, séries et produits infinis, constantes naturelles, nombre ou concept de l'infini.

Bays (Fribourg).

Sawyer, W. W.: The game of Oware. Scripta math., New York 15, 159—161 (1949).

Beschreibung eines in Westafrika verbreiteten Spiels für 2 Personen, das offenbar arithmetischer Natur ist, dessen Regeln aber nicht überall gleich sind. (Dem Ref. scheint es nahe verwandt zu sein mit einem vor etwa 30 Jahren von den Züllchower Anstalten, Züllchow bei Stettin, bezieharen „Bohnsenspiel“).

Sprague.

Lévy, Paul: Étude d'une classe de permutations. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 422—423 (1948).

Lévy, Paul: Étude d'une nouvelle classe de permutations. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 578—579 (1948).

Pour le contenu de ces deux Notes aux C. r. Acad. Sci., Paris, antérieures à la Note aux mêmes C. r., p. 1089—1090, voir notre référence, ce Zbl. **33**, 7. Bays.

Sprague, R.: Über ein Anordnungsproblem. Math. Ann., Berlin **121**, 52—53 (1949).

Deux problèmes concrets, mélange d'un jeu de cartes et rangement de wagons sur deux voies descendantes, conduisent l'A. au même problème d'analyse combinatoire suivant: Soit la permutation a_1, a_2, \dots, a_n (1) des éléments 1, 2, ..., n . On cherche dans (1) les éléments 1, 2, ..., n dans cet ordre, en lisant la permutation de gauche à droite; chaque fois qu'il faut reprendre l'élément $x + 1$ à gauche de l'élément x , on parle d'un nouveau segment de lecture. Soit P_λ la classe des permutations constituées de λ segments. Le théorème qui résoud le problème posé est le suivant: chaque permutation de la classe P_λ est exprimable par le produit de μ permutations (et pas moins) de la classe P_2 et on a pour μ et λ la relation: $2^{\mu-1} < \lambda \leq 2^\mu$.

S. Bays (Fribourg).

Schönhardt, E.: Zu G. Schultz: „Zwei Hilfssätze aus der Kombinatorik“. Z. angew. Math. Mech. **28** (1948), 274—275. Z. angew. Math. Mech. **29**, 320 (1949).

Ils'agit des 2 problèmes auxiliaires d'analyse combinatoire traités antérieurement par G. Schulz (voir notre référence ce Zbl. **31**, 147). L'A. montre, en dépouillant ces problèmes de leur revêtement géométrique, qu'ils reviennent en définitive à des questions de permutations d'éléments répétés. Ainsi le problème I que nous donnons dans notre réf. antérieure revient à la question suivante: les objets a étant les parties couvertes du segment de droite au nombre de k (chacune de ces parties est de longueur l), les objets b étant les parties non couvertes au nombre de $n - kl$, le nombre cherché est le nombre des permutations des n objets a et b , les k objets a étant identiques entre eux et les $n - kl$ objets b également. Le nombre de ces permutations est bien le nombre de Schulz.

S. Bays (Fribourg).

Mendelsohn, N. S.: Applications of combinatorial formulae to generalizations of Wilson's theorem. Canadian J. Math. **1**, 328—336 (1949).

L'A. obtient par l'emploi de différences finies d'opérateurs une série de formules combinatoires. Il donne deux applications de ces formules. La première est une formule explicite pour le nombre des relations entre n éléments qui ne sont pas isomorphiquement équivalentes, ou autrement dit, le nombre de manières de placer n objets distincts dans un nombre quelconque de casiers indiscernables. La seconde application lui fournit, en s'aidant du théorème de Fermat $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, une série de congruences qui sont dans un sens des généralisations du théorème de Wilson. La plus générale est la suivante: Soit n et k des entiers positifs tels que $k \geq n + 1$. Il existe un entier positif $N(n, k)$ et un nombre rationnel $R(n, k)$, univoquement déterminés, tels que:

$$\int_0^1 \frac{dx_n}{x_n} \int_0^{x_n} \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} \int_0^{x_{n-1}} \frac{dx_{n-2}}{x_{n-2}} \dots \int_0^{x_3} \frac{dx_2}{x_2} \int_0^{x_2} \left\{ \frac{(1-x_1)^{n-k}-1}{x_1} \right\} dx_1 \equiv R(n, k) \pmod{p}$$

pour tout entier premier $p \geq N(n, k)$.

S. Bays (Fribourg).

Lineare Algebra. Polynome:

Wielandt, Helmut: Ein Einschließungssatz für charakteristische Wurzeln normaler Matrizen. Arch. Math., Karlsruhe **1**, 348—352 (1949).

Es wird gezeigt, daß verschiedene bisher bekannte Einschließungssätze für die charakteristischen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ einer n -reihigen Matrix $L = (l_{\mu\nu})$ Spezial-

fälle eines allgemeineren Einschließungssatzes sind. Es sei eine reelle Spalte $y = \{\eta_1, \dots, \eta_n\} \neq 0$ und das von ihr durch L erzeugte Bild $Ly = z = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ mit $\zeta_\mu = \sum l_{\mu\nu} \eta_\nu$ bekannt. Ist L eine normale Matrix ($LL^* = L^*L$), so gibt es zu jedem reellen Polynom $f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2$, dessen „Moment“ $\langle f \rangle = \sum (\alpha_0 \eta_\nu^2 + \alpha_1 \eta_\nu \zeta_\nu + \alpha_2 \zeta_\nu^2) \geq 0$ ist, ein λ_ν mit $f(\lambda_\nu) \geq 0$. Durch passende Wahl von f folgen die bisherigen speziellen Einschließungssätze. In der komplexen Zahlenebene ergibt sich der Quotientensatz: Wenn ein Kreisbereich (abgeschlossenes Innere oder Äußere eines Kreises oder abgeschlossene Halbebene) alle Quotienten ζ_ν/η_ν enthält, für die $|\zeta_\nu| + |\eta_\nu| \neq 0$ ist, so enthält er ein λ_ν . Es folgt eine geometrische Deutung auf der Riemannschen Zahlenkugel. Collatz (Hannover).

Wegner, Udo: Remarque sur les valeurs propres des matrices. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1200 (1949).

Die lineare Funktion $w = (z + 1)(z - 1)^{-1}$ bildet die Halbebene $\operatorname{Re} z < 0$ konform auf das Innere des Einheitskreises $|w| = 1$ ab und führt die Eigenwerte einer quadratischen Matrix A über in die Eigenwerte der Matrix

$$B = (A - E)^{-1}(A + E).$$

Von dieser Matrix läßt sich der Eigenwert größten Absolutbetrages durch Iteration relativ einfach berechnen. H. Bilharz (Freiburg i. Br.).

Raymond, François H.: Remarque sur la stabilité en connexion avec les valeurs propres d'une matrice. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1564—1565 (1949).

Verf. betrachtet (vgl. das vorsteh. Referat) die beiden Abbildungen

$$w_1 = n(z + 1)(z - 1)^{-1} \quad \text{bzw.} \quad w_2 = n(z - 1)(z + 1)^{-1},$$

wobei n die Ordnung einer quadratischen Matrix A ist. Die Eigenwerte z_i von A gehen dabei über in diejenigen der Matrizen $C_1 = n(A - E)^{-1}(A + E) = nB_1$ bzw. $C_2 = n(A + E)^{-1}(A - E) = nB_2$, und es gilt: 1. Haben alle Elemente von B_1 einen Betrag $< n^{-1}$, so ist $\operatorname{Re} z_i < 0$. 2. Haben alle Elemente von B_2 einen Betrag $> n^{-1}$, so ist $\operatorname{Re} z_i < 0$; hieraus folgt wegen $B_2 + E = (E - B_2)A$ bzw. $2E = (E - B_2)(A + E)$ insbesondere: Sämtliche quadratischen Matrizen A der Gestalt $A = 2(E - B)^{-1} - E$, für welche die Elemente von B einen Absolutbetrag < 1 haben, sind positiv definit. H. Bilharz (Freiburg i. Br.).

Parodi, Maurice: Remarque sur la stabilité. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 51—52 (1949).

Parodi, Maurice: Sur une application d'un théorème de M. J. Hadamard. Bull. Sci. math., II. S. 72, 136—138 (1948).

Parodi, Maurice: Complément à un travail sur la stabilité. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1198—1200 (1949).

Parodi, Maurice: Application d'un théorème de M. Hadamard à l'étude de la stabilité des systèmes. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 807—808 (1949).

Die erste Note enthält die Resultate aus einer früheren Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. 32, 103). — Die zweite Note bringt deren Ausdehnung auf algebraische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten: Für $j, k = 1, \dots, n$ sei $|a_{jj}| - \sum_{k \neq j} |a_{kj}| > 0$

und $\operatorname{Re} a_{jj} > 0$. Dann hat die Gleichung $\det(a_{jk} + \delta_{jk}z) = 0$ nur Wurzeln mit negativen Realteilen. Diese Wurzeln liegen innerhalb der Vereinigung der n Kreise $|z + a_{jj}| \leq \sum_{k \neq j} |a_{kj}|$. — Die dritte Note gibt unter Benutzung eines

Satzes von A. Ostrowski (dies. Zbl. 16, 3) eine Verschärfung der Ergebnisse der ersten: Sei $\det(a_{ij} + \delta_{ij}z) = 0$ eine algebraische Gleichung n -ten Grades mit reellen Koeffizienten, $A = (a_{ij})$, $\det A > 0$ und $\operatorname{Re} z_i < 0$ für sämtliche Wurzeln z_i ; sei ferner $A^{-1} = (a^{ij})$ und $d = \sum_{i,j} 1/a^{ij} > 0$, so ist $|z_i| > d$ für $i = 1, \dots, n$.

— Die letzte Mitteilung schließlich zeigt, daß die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{a_{11} + b_{11}z}{\alpha_{11} + \beta_{11}z} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \frac{a_{22} + b_{22}z}{\alpha_{22} + \beta_{22}z} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \frac{a_{nn} + b_{nn}z}{\alpha_{nn} + \beta_{nn}z} \end{vmatrix} = 0$$

mit reellen Koeffizienten eine Hurwitzsche Gleichung ist, falls die Ungleichungen

$$a_{ii}^2 - h_i^2 \alpha_{ii}^2 > 0, \quad b_{ii}^2 - h_i^2 \beta_{ii}^2 > 0, \quad a_{ii} b_{ii} - h_i^2 \alpha_{ii} \beta_{ii} > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

gelten, wobei $\sum_{i \neq j} |a_{ij}| = h_i > 0$ ist; alle Wurzeln liegen in der Vereinigung der n Kreisscheiben

$$\left| \frac{a_{ii} + b_{ii}z}{\alpha_{ii} + \beta_{ii}z} \right| \leq h_i.$$

Sind speziell $a_{ii}, b_{ii}, \alpha_{ii}, \beta_{ii}$ positiv, so gehen diese Bedingungen über in die hinreichenden Bedingungen

$$\frac{a_{ii}}{\alpha_{ii}} > h_i, \quad \frac{b_{ii}}{\beta_{ii}} > h_i,$$

die bereits in der ersten Note abgeleitet worden sind. *H. Bilharz* (Freiburg i. Br.).

Herrmann, Aloys et Jean-Marie Souriau: Un critère de stabilité déduit du théorème de Sturm. *C. r. Acad. Sci., Paris* **228**, 1183—1184 (1949).

Es sei $P(x)$ ein komplexes Polynom n -ten Grades in der reellen Veränderlichen x ; $P_1 + iP_2$ seine Zerlegung in Real- und Imaginärteil, mit denen eine Sturmsche Kette gebildet wird: $P_1 + P_2 Q_2 + P_3 = 0, \quad P_2 + P_3 Q_3 + P_4 = 0, \dots, \quad P_{k-1} + P_k Q_k = 0$, wobei $P_k \neq 0$, Grad $P_{i+1} < \text{Grad } P_i$. $V(x)$ sei die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge $P_1(x), P_2(x), \dots, P_k(x)$. Die Imaginärteile sämtlicher Wurzeln der Gleichung $P(x) = 0$ sind dann und nur dann positiv, wenn $k = n + 1$, $V(\infty) = n$ und $V(-\infty) = 0$.

H. Bilharz (Freiburg i. Br.).

Cotton, E. et Ma Min Yuan: Sur les critères de stabilité de Routh et de Hurwitz. *Bull. Sci. math.*, II. S. **72I**, 115—128 (1948).

In Verallgemeinerung der aus dem Reellen hinlänglich bekannten Kriterien von J. E. Routh (1877) und A. Hurwitz (1895) geben Verff. mit Hilfe des Cauchyschen Indextheorems eine elementar abgefaßte und einheitliche Herleitung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine algebraische Gleichung mit komplexen Koeffizienten nur Wurzeln mit negativen Realteilen habe.

H. Bilharz (Freiburg i. Br.).

Montel, Paul: Sur les zéros des polynomes à coefficients réels associés à un polynome. *C. r. Acad. Sci., Paris* **229**, 501—502 (1949).

Ein Polynom $\Pi(z)$ n -ten Grades mit komplexen Koeffizienten läßt sich in der Form $\Pi(z) = P(z) + iQ(z)$ schreiben, wo die Polynome $P(z)$ und $Q(z)$ reelle Koeffizienten besitzen. Die Polynome $P(z) + \lambda Q(z)$ bei reellen Zahlen λ bilden ein zu $\Pi(z)$ assoziiertes Büschel. Haben p bzw. $q = n - p$ Nullstellen von $\Pi(z)$ positive bzw. negative Imaginärteile und ist $p \geq q$, so wird die Zahl $r = p - q$ der Index der rationalen Funktion $R = P/Q$ genannt. Jedes Polynom des Büschels besitzt mindestens r verschiedene reelle Nullstellen. Die Funktion R nimmt jeden reellen Wert in mindestens r verschiedenen Punkten der reellen Achse an. Dies gilt auch für die Funktionen $R_1 = P_1/Q_1$, wenn P_1 und Q_1 beliebige Polynome des zu $\Pi(z)$ assoziierten Büschels sind. Die Arbeit enthält Resultate auch über die Form der Partialbruchzerlegung von $R(z)$. Ist $R_k(z)$ eine gebrochene rationale Funktion vom Index r_k , die sich aus einem komplexen Polynom $\Pi_k(z)$ ergibt, so hat die Funktion $R_{12}(z) = R_1[R_2(z)]$ den Index $r_{12} = r_1 r_2$. Die Arbeit enthält keine Beweise.

Gyula Sz.-Nagy (Szeged).

Klobe, W.: Über eine untere Abschätzung der n -ten Kreisteilungspolynome $g_n(z) = \prod_{d|n} (z^d - 1)^{\mu(n/d)}$. J. reine angew. Math. 187, 68—69 (1949).

Der Wedderburnsche Satz von der Kommutativität endlicher Schiefkörper wurde von Witt (vgl. dies. Zbl. 2, 118) nach Anwendung elementarer Sätze über endliche Gruppen auf die Abschätzung $|\Phi_n(q)| \geq q - 1$ des Kreisteilungspolynoms für $q = 2, 3, \dots$ zurückgeführt. Witt führte den Nachweis dieser Abschätzung auf analytischem Wege. Verf. ersetzt diesen analytischen Schluß durch einen elementar-arithmetischen Beweis folgenden Satzes: Die natürliche Zahl $n > 1$ habe r verschiedene Primfaktoren. Dann gilt für reelles $z > 1$ die Abschätzung $\Phi_n(z) > (z - 1)^{2^{r-1}}$.

H. L. Schmid (Berlin).

Amato, Vincenzo: Le curve algebriche a gruppo G_s . Mat., Catania 4, 3 S. (1949).

Verf. nimmt Bezug auf seine Arbeit in Atti Accad. Gioenia Sci. natur. Catania, VI. S. 20, 1—21 (1934); dies. Zbl. 10, 393—394. Gegeben eine algebraische Gleichung m -ten Grades ($m = \varrho r$, ϱ ganz, r ganz):

$$u^m + \alpha_1(z) u^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1}(z) u + \alpha_m(z) = 0.$$

Wir betrachten die Gleichung über dem Körper R , dem durch die Unbestimmte z erweiterten Koeffizientenkörper. Voraussetzung sei weiter, daß ihre Gruppe G_S die Normalisatorgruppe des Zykelnprodukts $S = (u_1, \dots, u_r)(u_{r+1}, \dots, u_{2r}) \dots (u_{m-r+1}, \dots, u_m)$ sei. Dann erfüllen die ϱ Größen $y_k = \prod_{j=1}^r (a - u_{r(k-1)+j})$, wo a beliebig in R

ist, eine zyklische Resolvente r -ten Grades

$$\varphi(z, y) = y^r + \beta_1(z, y) y^{r-1} + \dots + \beta_r(z, y) = 0.$$

Hier ist y eine Abkürzung für den Vektor (y_1, \dots, y_r) . Dies führt zum Ergebnis: Die algebraischen Kurven mit der Gruppe G_S sind dadurch charakterisiert, daß die Zweige der algebraischen Funktion u in der Riemannschen Fläche der Resolvente $\varphi(z, y) = 0$ nach Zykeln auf alle möglichen Arten verzweigt sind, ohne das System der Imprimitivität zu verlassen.

Holzer (Graz).

● **Behari, Ram and Hansraj Gupta:** An introduction to the theory of equations.

Delhi and Lahore: S. Chand & Co. 1947. 169 p.

Das Buch ist sehr elementar gehalten, berücksichtigt aber den Aufbau der Algebra, soweit er ohne Gruppentheorie möglich ist. Nicht nur auf numerische Methoden, sondern auch auf Rechenverfahren, die symmetrischen Funktionen der Wurzeln durch die elementarsymmetrischen auszudrücken, wird Wert gelegt. — Die Einteilung ist: 1. Allgemeine Polynomeigenschaften. 2. Beziehungen zwischen Wurzeln und Koeffizienten einer Gleichung. 3. Symmetrische Funktionen. 4. Transformation von Gleichungen. 5. Lage und Art der Wurzeln einer Gleichung. 6. Numerische Lösungen. 7. Kubische, biquadratische und binomische Gleichungen. — Jedem Abschnitt sind zahlreiche Aufgaben, größtenteils mit Ergebnissen beigelegt. Holzer (Graz).

Gruppentheorie:

Baer, Reinhold: Free sums of groups and their generalizations. An analysis of the associative law. Amer. J. Math. 71, 706—742 (1949).

Es werden mit großer Sorgfalt Bedingungen untersucht, unter denen sich ein unvollständiges Gruppoid (d. i. ein System mit einer Verknüpfung, die nicht notwendig für alle Paare von Elementen des Systems, aber, soweit überhaupt, eindeutig erklärt ist) in eine Gruppe einbetten läßt. Verf. schreibt die Systeme additiv (gleichgültig, ob sie kommutativ sind oder nicht) und nennt ein unvollständiges Gruppoid kurz ein „Add“. Mit dem Add A läßt sich in natürlicher Weise eine Halbgruppe $D(A)$ (d. i. ein System mit assoziativer Verknüpfung, die für alle Paare von Elementen eindeutig erklärt ist: vom Verf. „additive manifold“ genannt) verbinden: den Elementen $a \in A$ entsprechen eineindeutig Erzeugende $a^* \in D(A)$, und zwischen diesen gelten definierende Relationen von der Form $a^* + b^* = c^*$, nämlich genau dann, wenn $a + b = c$ in A gilt. Die Abbildung $a \rightarrow a^*$ von A auf (einen Teil von) $D(A)$ heißt „natürliche Homomorphie“. Diese Homomorphie ist offenbar dann und nur dann eine Isomorphie, wenn A in eine Halbgruppe einbettbar ist.

(Verallgemeinerung eines Resultats von Hanna Neumann, dies. Zbl. 32, 104.) Diese Bedingung ist das dritte der vier Assoziativgesetze, die formuliert und verglichen werden. Das zweite, welches sich als schwächer als das dritte erweist, fordert nur die Eineindeutigkeit der natürlichen Homomorphie; das erste, welches wiederum schwächer als das zweite ist, fordert, daß, wenn eine Summe von Elementen von A in fester Reihenfolge mit einer gewissen Klammerung einen Wert in A hat, jede andere Klammerung denselben Wert oder aber gar keinen Wert ergibt. Das vierte Assoziativgesetz ist gleichwertig damit, daß, wenn $a_1^* + \dots + a_n^* = b^*$ in $D(A)$ gilt, dann auch die entsprechende Gleichung zwischen den Originalen a_1, \dots, a_n, b (unter der natürlichen Homomorphie) in A für mindestens eine Klammerung der linken Seite gilt (diese Formulierung weicht von der des Verf. ab). Verf. zeigt, daß das vierte Assoziativgesetz stärker als das dritte ist. — Ist das dritte Assoziativgesetz erfüllt, so wird $D(A)$ von A frei im Sinne von Grace E. Bates [Free nets and loops and their generalizations, Amer. J. Math. 69, 499—550 (1947)] erzeugt. Ist sogar das vierte Assoziativgesetz erfüllt, so wird $D(A)$ von A frei im Sinne von O. Schreier [Die Untergruppen der freien Gruppen, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 5, 161—183 (1927)] erzeugt; das bedeutet, grob gesagt, daß jede Relation in $D(A)$ in gewissermaßen trivialer Weise aus Relationen in A folgt. Die wichtige Unterscheidung zwischen Bates-Freiheit und Schreier-Freiheit wird nun insbesondere verfolgt in dem Fall, daß A aus Gruppen mit vereinigten Untergruppen besteht, wofür Verf. die Bezeichnung „Amalgam“ von Gruppen einführt. Ein Satz von O. Schreier (a. a. O.) und mehrere Sätze von Hanna Neumann (a. a. O.) werden neu und zum Teil verallgemeinert bewiesen. Die Beweise weichen von denen in den zitierten Arbeiten insbesondere durch die konsequente Verwendung der von E. Artin [The free product of groups, Amer. J. Math. 69, 1—4 (1947)] unlängst in die Theorie der freien Produkte eingeführte Vektorrechnung ab. [Einige verwandte Resultate finden sich, mit nur skizzierten Beweisen, bei A. Malcev, Sur les groupes topologiques locaux et complets, C. r. (Doklady) Acad. Sci. URSS, n. S. 32, 606—608 (1941).]

B. H. Neumann (Manchester).

Baer, Reinhold: Groups with descending chain condition for normal subgroups. Duke Math. J. 16, 1—22 (1949).

Gruppen mit Minimalbedingung für Normalteiler werden vom Verf. kurz D -Gruppen genannt. Für solche Gruppen, und z. T. auch für allgemeinere Gruppen, werden eine große Reihe von Tatsachen bewiesen, von denen nur die folgenden als typisch hervorgehoben werden mögen: Bezeichnet $Z(G)$ das Zentrum der Gruppe G , $J = J(G)$ den Durchschnitt aller Untergruppen von endlichem Index in G , $F = F(G)$ die Gruppe, die aus allen Elementen besteht, die in G nur endlich viele Konjugierte besitzen, so gilt in der D -Gruppe G : $Z(J) = J \cap F = F(J)$. Ist fernerhin $F' = F'(G)$ diejenige Untergruppe von G , die F enthält, derart, daß $F'/F \cong F(G/F)$ ist, so ist in einer D -Gruppe $F'/Z(F)$ endlich; die Minimalbedingung ist für alle Untergruppen von F' erfüllt; F' ist lokal endlich (d. h. endlich erzeugte Untergruppen von F' sind endlich): $F(F') = F$; in G/F' haben alle Elemente (außer der Einheit) unendlich viele Konjugierte. Ist $S_1 = S_1(G)$ die Vereinigung der endlichen minimalen Normalteiler von G , $S_{\nu+1}$ die S_ν enthaltende Untergruppe von G , für die $S_{\nu+1}/S_\nu \cong S_1(G/S_\nu)$ ist, und, wenn ρ Limeszahl ist, S_ρ Vereinigung der S_ν mit $\nu < \rho$, so gibt es eine endliche Zahl n derart, daß

$$F' = S_{\omega+n} = S_{\omega+n+1} = \dots$$

ist. Das Hyperzentrum Z^* von G ist in F' enthalten; in der aufsteigenden Zentralreihe ist $Z^* = Z_{\omega+i}$ für ein gewisses endliches i ; Z_ω hat endlichen Index in Z^* und $Z_\omega = Z^* \cap F$. Die Beweise stützen sich mehrfach auf frühere Arbeiten des Verf., insbesondere auf „Finiteness properties of groups“ (dies. Zbl. 31, 197).

B. H. Neumann (Manchester).

Černikov, S. N.: Zur Theorie der lokal auflösbaren Gruppen mit Minimalbedingung für die Untergruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 21—24 (1949) [Russisch].

In einer vorangehenden Arbeit „Zur Theorie der speziellen p -Gruppen“ (dies. Zbl. 31, 6) hat Verf. bewiesen, daß jede unendliche lokal-endliche p -Gruppe mit Minimal-Bedingung für Abelsche Untergruppen als Erweiterung eines direkten Produktes von endlichvielen Gruppen des Typs (p^∞) mit Hilfe einer endlichen p -Gruppe dargestellt werden kann. In der vorliegenden Note wird dieses Resultat auf lokal-auflösbare Gruppen folgendermaßen erweitert: Jede unendliche lokal-auflösbare Gruppe mit Minimal-Bedingung für Abelsche Untergruppen kann als Erweiterung eines direkten Produktes von endlichvielen Gruppen des Typs (p^∞) (für verschiedene Primzahlen p) mit Hilfe einer endlichen auflösbaren Gruppe dargestellt werden. Es ergibt sich ferner, daß bei lokal-auflösbaren Gruppen die Minimal-Bedingung für Untergruppen schon eine Konsequenz der Minimal-Bedingung für Abelsche Untergruppen ist. [Für entsprechende Sachverhalte bei auflösbaren Gruppen mit Maximal-Bedingung vgl. die Arbeit des Ref., „On infinite soluble groups, III“, Proc. London math. Soc., II. S. 49, 184—194 (1946), insbesondere Satz 3.21, und A. I. Mal'cev, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 23—25 (1949); dies. Zbl. 33, 246].

K. A. Hirsch (Newcastle-upon-Tyne).

Piccard, Sophie: Un théorème concernant le nombre des bases d'un sous-groupe transitif et primitif, à base du second ordre, du groupe symétrique. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 254—256, 745—747 (1948).

Soit S le groupe symétrique de n éléments et un sous-groupe transitif G de S . S'il existe dans S une substitution $R \neq 1$ permutable avec toutes les substitutions de G , R est régulière et G est un groupe imprimitif. Par conséquent si le sous-groupe transitif G est primitif, il n'existe aucune substitution $R \neq 1$ du groupe S qui soit permutable avec toutes les substitutions de G . — Sur ce point de départ, l'A. qui s'est occupé jusqu'ici principalement du nombre des bases du groupe symétrique et du groupe alterné, établit la proposition suivante: quel que soit le sous-groupe transitif et primitif G du groupe S , à base du second ordre (tel qu'il existe des couples de substitutions de G générateurs de ce groupe, alors que G ne saurait être engendré par une seule de ses substitutions), le nombre total des bases de G est un multiple de m ou de $m/2$, m désignant le nombre des substitutions du groupe S qui transforment le groupe G en lui-même.

S. Bays (Fribourg).

Russo, Salvatore: Legge di moltiplicazione delle sostituzioni di un gruppo G_S con la S prodotto di due cicli dello stesso ordine. Mat., Catania 4, 3 S. (1949).

Unter Berufung auf die dies. Zbl. 33, 345 besprochene und die dort zitierte Arbeit von V. Amato und mit derselben Bezeichnungsweise behandelt Verf. speziell die Gruppe G_S für $q = 2$. Heißen C_1 und C_2 die beiden Zykeln von S , so gehören zur Gruppe G_S : 1. Die Elemente $S_{h,k} = C_1^h C_2^k$, 2. Die Elemente $T_{h,k}$, die die Permutation $a_1 \dots a_r$ (Ausgangspermutation des ersten Zyklus) in die Permutation C_2^h , dagegen $a_{r+1} \dots a_{2r}$ in die Permutation C_1^k überführen. — Es ergeben sich unter anderm die Multiplikationsregeln

$$(1) S_{h,k} T_{h',k'} = T_{h+h', k+k'} \quad (2) T_{h,k} S_{h',k'} = T_{h+k', k+k'} \\ \text{bzw.} \quad (3) T_{h',k'} S_{h,k} = T_{h'+k, h+k'}$$

(1) ist durch Druckfehler entstellt. Vergleich von (1) und (3) stellt die Nichtkommutativität in Evidenz. — Zuletzt setzt Verf. auch $r = 2$ und erhält eine Gruppentafel für die Diedergruppe des Quadrats.

Holzer (Graz).

Shapiro, Arnold: Group extensions of compact Lie groups. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 581—586 (1949).

Soient B et F deux groupes de Lie compacts et connexes, $\text{Ext}(F, B)$ le groupe des classes d'extensions de F par B [cf. Eilenberg et MacLane, Ann. Math.,

Princeton, II. S. 43, 757—831 (1942)], \tilde{B} le revêtement universel de B , π le noyau de la projection de \tilde{B} dans B , isomorphe au groupe fondamental de B , $H_{\tilde{B}}$ le sous-groupe du groupe $\text{Hom}(\pi, C)$ des homomorphismes de π dans le centre C de F , formé par les homomorphismes qu'on peut prolonger à \tilde{B} . L'A. démontre le résultat suivant: $\text{Ext}(F, B)$ est isomorphe au groupe quotient $\text{Hom}(\pi, C)/H_{\tilde{B}}$. On utilise pour celà l'existence d'une section locale dans une extension de F par B ; on peut alors définir le groupe $\text{Ext}^*(F, B)$ des classes d'extensions de F par B admettant une section locale et identifier $\text{Ext}(F, B)$ au groupe quotient de $\text{Ext}^*(F, B)$ par un sous-groupe N . On fabrique alors un isomorphisme de $\text{Hom}(\pi, C)$ sur $\text{Ext}^*(F, B)$, cet isomorphisme appliquant $H_{\tilde{B}}$ sur N , d'où le résultat. *J. Braconnier.*

Verbände. Ringe. Körper:

Levitcki, Jakob: On multiplicative systems. *Compositio math.*, Groningen 8, 76—80 (1950).

M sei ein assoziatives multiplikatives System, das die Null enthält. M heißt ein Nilsystem, wenn jedes Element von M nilpotent ist; ist $M^n = 0$, so heißt M nilpotent, andernfalls potent. Ist M ein potentes Nilsystem, das durch endlich viele Elemente erzeugt wird, so enthält M eine unendliche Kette $M \supset M^* \supset M^{**} \supset \dots$ von potenten Teilsystemen, jedes echte Teilmenge des vorangehenden. Die zugehörige Kette der Linksannihilatoren $Z(M) \subset Z(M^*) \subset \dots$ ist ebenfalls echt aufsteigend. Ist S ein Ring, der die Minimalbedingung für potente Rechtsideale erfüllt, so ist jedes durch endlich viele Elemente erzeugte Nilsystem in S nilpotent. Dasselbe gilt, wenn S die Maximalbedingung für Rechtsideale erfüllt, speziell ist in einem solchen Ring jedes Rechtsideal nilpotent. Erfüllt S die Maximalbedingung sowohl für Rechts- wie für Linksideale, so ist jedes Nilsystem in S nilpotent. Die Arbeit ist bereits 1939 eingereicht worden. *G. Köthe (Mainz).*

Raffin, Raymond: L'inversibilité dans les algèbres linéaires non associatives. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 228, 1685—1687 (1949).

Es sei \mathfrak{U} eine endlich-dimensionale, nicht-assoziative lineare Algebra über dem reellen Zahlenkörper K mit Einselement e . Hat jedes a in \mathfrak{U} mindestens ein zweiseitiges Inverselement a^{-1} , so heißt \mathfrak{U} symmetrisch; gibt es für jedes a nur ein einziges a^{-1} , so heißt \mathfrak{U} monosymmetrisch. Verf. betrachtet Algebren \mathfrak{P} mit den Basiselementen e, e_1, \dots, e_n , wo $e_i^2 = -e$, $e_i e_j = -e_j e_i$ ($i \neq j$), und beweist: 1. die Algebren \mathfrak{P} sind symmetrisch; 2. die dreidimensionalen Algebren \mathfrak{P} mit $e_1 e_2 \neq 0$, sowie die vierdimensionalen \mathfrak{P} [falls $\{e_i e_j\}$ ($i \neq j$) die Basis eines dreidimensionalen Raumes ist] sind monosymmetrisch; 3. alle monosymmetrischen Algebren mit Dimension 2 sind mit einer Algebra \mathfrak{P} äquivalent. *L. Fuchs (Budapest).*

Schafer, R. D.: Inner derivations of non-associative algebras. *Bull. Amer. math. Soc.* 55, 769—776 (1949).

Eine lineare Transformation D einer nicht-assoziativen Algebra \mathfrak{A} über einem Körper \mathfrak{F} heißt eine Derivation, wenn für jedes x, y in \mathfrak{A} , $(xy)D = x(yD) + (xD)y$ gilt. Es sei \mathfrak{M} die lineare Menge $R(\mathfrak{A}) + L(\mathfrak{A})$, erzeugt durch die Rechts- und Linksmultiplikationen R_x, L_x von \mathfrak{A} ($x \in \mathfrak{A}$), und es sei $[\mathfrak{S}, \mathfrak{T}]$ die lineare Menge, die durch alle $[S, T] = ST - TS$ ($S \in \mathfrak{S}, T \in \mathfrak{T}$) erzeugt ist. Dann ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}_1 + \dots + \mathfrak{M}_i + \dots$ [mit $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$; $\mathfrak{M}_i = [\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_{i-1}]$ ($i = 2, 3, \dots$)] die kleinste Liesche Algebra, die \mathfrak{M} umfaßt. \mathfrak{L} heißt die Liesche Transformationsalgebra von \mathfrak{A} . Gehört die Derivation D zu \mathfrak{L} , dann nennt Verf. D eine innere Derivation von \mathfrak{A} . Verf. betrachtet die Liesche Transformationsalgebra und die inneren Derivationen von speziellen Algebren. Er beweist: 1. ist \mathfrak{A} assoziativ, dann ist $\mathfrak{L} = R(\mathfrak{A}) + L(\mathfrak{A})$, und D ist genau dann eine innere Derivation, wenn D in der

Gestalt $R_d - L_d$ ($d \in \mathfrak{A}$) geschrieben werden kann [hier darf \mathfrak{A} keinen absoluten Rechts-(Links-)nullteiler haben]; 2. ist \mathfrak{A} eine Liesche Algebra, dann ist $\mathfrak{Q} = R(\mathfrak{A})$, und D ist genau dann eine innere Derivation, wenn $D = R_d$ ($d \in \mathfrak{A}$); 3. ist \mathfrak{A} eine alternative Algebra und ist die Charakteristik von \mathfrak{F} nicht zwei, so hat man $\mathfrak{Q} = R(\mathfrak{A}) + L(\mathfrak{A}) + [L(\mathfrak{A}), R(\mathfrak{A})]$; ist außerdem \mathfrak{A} halbeinfach und hat \mathfrak{F} die Charakteristik 0, so sind alle Derivationen von \mathfrak{A} innere; 4. ist \mathfrak{A} eine Jordansche Algebra über einem Körper mit einer Charakteristik $\neq 2$, dann gilt $\mathfrak{Q} = R(\mathfrak{A}) + [R(\mathfrak{A}), R(\mathfrak{A})]$; hat \mathfrak{A} ein Einselement, so ist D dann und nur dann eine innere Derivation, wenn $D = \sum_i [R_{x_i}, R_{z_i}]$ ($x_i, z_i \in \mathfrak{A}$) ist. L. Fuchs (Budapest).

Albert, A. A.: Absolute-valued algebraic algebras. Bull. Amer. math. Soc. 55, 763—768 (1949).

Eine Algebra \mathfrak{A} über einem Körper \mathfrak{F} heißt algebraisch, wenn für jedes x in \mathfrak{A} die durch x erzeugte Subalgebra $\mathfrak{F}[x]$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über \mathfrak{F} ist. Verf. hat bereits früher (dies. Zbl. 29, 10) bewiesen, daß jede bewertete, reelle, endlich-dimensionale Algebra mit Einselement entweder der reellen oder der komplexe Zahlenkörper oder die reelle Quaternionenalgebra oder endlich die reelle Cayley-Algebra ist. In der vorliegenden Arbeit dehnt der Verf. diese Resultate auf bewertete algebraische Algebren über dem reellen Zahlenkörper mit Einselement aus. Er zeigt, daß eine solche Algebra notwendigerweise eine endliche Dimension hat und somit mit einer der oben genannten Algebren identisch ist. L. Fuchs.

Lesieur, Léonce: Anneaux réguliers, anneaux de matrices. J. Math. pur. appl. Paris, IX. S. 27, 205—253 (1948).

L'A. étudie ici une généralisation de la notion due à Ore d'anneau régulier à droite [Ann. Math., Princeton, II. S. 32, 463—477 (1931); ce Zbl. 1, 266]. Cette généralisation est ainsi caractérisée: Deux éléments quelconques l et m de l'anneau \mathfrak{o} vérifient au moins une relation: $lb + mb' = 0$, où b et b' sont tels qu'on puisse leur associer au moins un couple d'éléments a, a' , le système:

$$au + bv = 0, \quad a'u + b'v = 0$$

n'admettant que la solution $u = v = 0$. — Les anneaux \mathfrak{o} satisfont à la propriété de transfert à l'anneau O_n des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathfrak{o} (ce qui n'a pas lieu pour les anneaux réguliers à droite de Ore qui sont sans diviseurs de zéro). — L'A. étudie plusieurs cas particuliers des anneaux \mathfrak{o} satisfaisant tous à la propriété de transfert à O_n . Il envisage notamment la propriété supplémentaire (propriété 1): Tout diviseur de zéro à droite est également diviseur de zéro à gauche. [Je signale une petite imperfection — sans gravité puisqu'elle n'affecte pas le résultat — dans la démonstration du théorème 5 (p. 231 sixième à huitième lignes).] Particularisant davantage, il impose la propriété 2: Il existe un élément unité et tout élément non diviseur de zéro à gauche est inversible à droite. On obtient alors les pseudo-corps réguliers à droite. (Tout anneau \mathfrak{o} satisfaisant la propriété supplémentaire 1 peut être plongé dans un pseudo-corps régulier à droite.) — Un type d'anneaux de généralité intermédiaire entre celle des anneaux \mathfrak{o} et celle des pseudo-corps réguliers à droite est encore défini par la propriété 3: Il existe un élément unité et, à deux éléments quelconques l et m , il correspond toujours une matrice inversible $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ et un élément c tels que $(l \ m) \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = (c \ 0)$. Finalement, une particularisation de ce dernier type est envisagée: anneaux \mathfrak{o} vérifiant la propriété 3 dans lesquels l'annulateur à droite de tout élément est un idéal principal à droite. — Dans ce travail, l'étude des anneaux de matrices O_n occupe une place importante. Elle s'appuie largement sur un théorème de réduction à la forme d'Hermite (sans zéros au dessus de la diagonale principale). Des conséquences intéressantes concernant les systèmes d'équations linéaires à coefficients dans \mathfrak{o}

et la dépendance linéaire dans un \mathfrak{o} -module à droite en sont tirées. Notons encore la définition d'un espace projectif à partir d'un pseudo-corps, généralisant l'espace réglé de l'espace projectif ordinaire. *R. Croisot (Poitiers).*

Dieudonné, Jean: Théorie de Galois des extensions radicielles d'exposant quelconque. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 148—150 (1949).

Bezugnehmend auf die in einer früheren Note des Verf. (dies. Zbl. **33**, 156) eingeführten Bezeichnungen wird bewiesen: Ist Δ ein Liescher p -Ring (bez. der Multiplikation $[D_1, D_2]$) von Halbbableitungen der Höhe r eines Körpers K von Primzahlcharakteristik p , ist weiter die Menge Σ der in Δ enthaltenen speziellen Halbbableitungen ein Ring $\neq \Delta$ bez. der Multiplikation $D_1 D_2$, ein Ideal in Δ sowie ein endlicher Vektorraum über K und ist schließlich Δ endlicher Vektorraum über dem Durchschnitt M aller N_D mit $D \in \Sigma$, dann ist K endlich und rein-inseparabel vom Exponenten $r + 1$ über dem Durchschnitt L aller N_D mit $D \in \Delta$, und es gilt $\Delta = \Delta(L, M)$, $\Sigma = \Sigma(L, M)$. Ferner wird gezeigt: Unter den Körpern M mit $L(K^{p^r}) \subseteq M \subseteq K$ und $M^p \subseteq L$ ist $M = L(K^{p^r})$ dadurch ausgezeichnet, daß $\Sigma(L, M)$ und — damit gleichbedeutend — auch $\Delta(L, M)$ den größtmöglichen Rang über K hat. *Pickert.*

Ballieu, Robert: Anneaux finis à module de type (p, p^2) . Ann. Soc. sci. Bruxelles, Sér. I **63**, 11—23 (1949).

In dieser Note trägt der Verf. die Beweise der von ihm bereits veröffentlichten Resultate (dies. Zbl. **31**, 108) nach. *G. Reichel (Tübingen).*

Serre, Jean-Pierre: Extensions de corps ordonnés. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 576—577 (1949).

L'A. apporte un intéressant complément aux résultats classiques d'Artin-Schreier sur les corps ordonnables („formal-reelle Körper“) en donnant la condition pour que la structure d'ordre d'un corps K puisse se prolonger à une extension L de K : il faut et il suffit que la relation $\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 = 0$, où les $p_i > 0$ sont dans K et les x_i dans L , entraîne $x_i = 0$ pour tout indice i . Ce résultat permet de simplifier l'exposé de la théorie des corps ordonnables. *J. Dieudonné (Nancy).*

Abellanas, Pedro: Ordenbare Körper mit einem einzigen Automorphismus. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. **9**, 3—9 (1949) [Spanisch].

Verf. gibt als hinreichend, daß ein ordenbarer Körper, also einer, in dem die Begriffe größer und kleiner erklärbar sind, einen einzigen Automorphismus, also nur den identischen, hat, die beiden folgenden Bedingungen: 1. Die Anordnung ist archimedisch. 2. Das quadratische Postulat ist erfüllt, d. h. die Quadratwurzel jedes positiven Elements liegt im Körper. — Daß bei Fehlen auch nur einer Bedingung die Behauptung nicht richtig zu bleiben braucht, zeigt Verf. an Gegenbeispielen. *Holzer (Graz).*

Abellanas, Pedro: Erläuterung zu der Arbeit: „Ordenbare Körper mit einem einzigen Automorphismus“. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. **9**, 80 (1949).

Kurze Bemerkung zu vorstehend besprochener Arbeit des Verf. *Holzer.*

Zahlentheorie:

Gloden, A.: Un nouveau procédé de résolution de la sextigrade normale $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$. Bull. Soc. Sci. Liège **17**, 252—256 (1948).

Verf. gibt die Herleitung einiger Titelgleichungen aus solchen $a_1, \dots, a_4 \stackrel{3}{=} b_1, \dots, b_4$. *Holzer (Graz).*

Sastry, S. and T. Rai: On equal sums of like powers. Math. Student, Madras **16**, 18—19 (1949).

Verf. geben ein Beispiel, wo die Summe von sechs siebenten Potenzen natürlicher Zahlen die Summe von sechs anderen siebenten Potenzen ist. *Holzer (Graz).*

Mirsky, L.: A remark on D. H. Lehmer's solution of the Tarry-Escott problem. Scripta math., New York **14**, 126—127 (1948).

Verf. gibt einen neuen Beweis eines Satzes von D. H. Lehmer (dies. Zbl. **29**, 110). Holzer (Graz).

Wright, E. M.: The Prouhet-Lehmer problem. J. London math. Soc. **23**, 279—285 (1949).

Verf. beweist: Gegeben die $k(s-1)$ simultanen diophantischen Gleichungen ($k \geq 1, s \geq 2$)

$$\sum_{i=1}^j x_{i1}^h = \cdots = \sum_{i=1}^j x_{is}^h \quad (1 \leq h \leq k).$$

Wird mit $L(k, s)$ der kleinste Wert von j bezeichnet, so daß eine Lösung (natürlich nicht trivial) des Systems existiert, ohne daß alle $\sum_{i=1}^j x_{iu}^{k+1}$ ($1 \leq u \leq s$) gleich sind, weiter mit $W(k, s)$ der kleinste Wert von j , so daß die erwähnten Zahlen durchwegs voneinander verschieden sind, so gibt Verf. die Abschätzungen:

$$(1) \quad L(k, s) \leq (k+1)([\mu_s] + 1). \quad (2) \quad W(k, s) \leq (k+1)([\mu_s] + 1).$$

Hierbei ist $[\mu_s] = \log \{2 + k(s-1)/2\} / \log(1 + 1/k)$. (3) Ist $s \leq 2^m$, so ist $W(k, s) \leq m W(k, 2)$. Holzer (Graz).

Vandiver, H. S.: On congruences which relate the Fermat and Wilson quotients to the Bernoulli numbers. Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 332—337 (1949).

Für den Wilsonquotienten $W = [(p-1)! + 1]/p$, wo p eine Primzahl ist, zeigt Verf. (alle Kongruenzen gelten mod p): (1) Mit $\lambda(1, r) = 0$, $\lambda(m, r) = \sum [\varrho^r - 1]/(\varrho^p - 1)$, wo die Summe über alle m -ten Einheitswurzeln ϱ mit Ausnahme von 1 zu erstrecken ist, gilt $-2W \equiv \sum_{m=1}^{p-1} \lambda(m, 1)$. (2) Sei b_n die n -te Bernoulli-

lische Zahl. Dann ist $-r b_k/k - r^{k+1} b_{p-1-k}/(p-1-k) \equiv \sum_{m=1}^{p-1} m^k \lambda(m, r)$. Dabei ist $k < p-1$. (3) Für $rt < p$ gilt

$$\sum_{m=1}^{p-1} \left[\frac{\lambda(m, r)}{t} + \frac{\lambda(m, t)}{r} \right] \equiv \sum_{m=1}^{p-1} \left[\frac{\lambda(m, rt)}{rt} + \lambda(m, 1) \right].$$

(4) Es ist mit $q(r) = (r^{p-1} - 1)/p$, wenn $(k, p) = 1$, $(m, p) = 1$, $k = ps + m$ mit ganzem nichtnegativem s und positivem k ist

$$q \binom{m}{k} - W + \sum_{n=1}^m \binom{m}{k} \frac{b_n}{n} \equiv \binom{s + [t/p]}{k}.$$

Nur in letzter Formel ist $[x]$ = größtes Ganzes von x .

Holzer (Graz).

Kapferer, Heinrich: Über ein Kriterium zur Fermatschen Vermutung. Comment. math. Helvetici **23**, 64—75 (1949).

Verf. zeigt: Ist p eine Primzahl > 7 , $x^p + y^p + z^p = 0$ eine Fermatsche Gleichung mit $P = xyz(y-z)(z-x)(x-y)$ zu p prim, so muß die Diskriminate von

$$\sum_r \binom{(p-r)/2 - r}{2r} \frac{tr}{2r+1}$$

durch p teilbar sein. — Überflüssigerweise fügt Verf. in P noch den Faktor $(x^2 + y^2 + z^2)$ hinzu und übersieht, daß dieser im sogenannten Fall I der Fermatschen Gleichung niemals durch p teilbar ist [F. Pollaczek, S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., II. a. **126**, 45—59 (1917)]. — Die Methode geht dahin: Das Polynom $[(x+y)^p - x^p - y^p]/pxy(x^2 + xy + y^2)^s$, wo s der kleinste positive Rest von $(-p) \bmod 3$ ist, wird im Primkörper der Charakteristik p ein homogenes Polynom von $u = (x^2 + xy + y^2)^3$, $v = x^2 y^2 (x^2 + y^2)$. Holzer (Graz).

Inkeri, K.: On the second case of Fermat's last theorem. Ann. Acad. Sci. Fennicae A I, Nr. 60, 32 S. (1949).

Verf. diskutiert im Anschluß an die Arbeiten von H. S. Vandiver aus den Jahren 1929—1939 die Fermatsche Gleichung für Primzahlexponenten l , für welche der zweite Faktor der Klassenzahl des Körpers $k(\zeta)$ der l -ten Einheitswurzeln ζ zu l prim ist. Ein Endergebnis ist, daß sie in $k(\zeta + \zeta^{-1})$ unlösbar ist für alle $l \leq 617$. Das entscheidende, bereits von Vandiver benutzte Hilfsmittel ist das der \mathfrak{E} -Menge: Es sei r eine Primitivwurzel mod l , S_r sei definiert durch $\zeta^{S_r} = \zeta^r$ und

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1 - \zeta^r}{1 - \zeta} \frac{1 - \zeta^{-r}}{1 - \zeta^{-1}}}, \quad l_1 = \frac{l-3}{2}, \quad F_n(S) = \sum_{\nu=0}^{l_1} r^{(l-1-2\nu)r} S^\nu, \quad E_n(\zeta) = \varepsilon^{F_n(S)};$$

ferner seien B_{n_1}, \dots, B_{n_s} alle Bernoullischen Zahlen eines Index $\leq (l-3)/2$, deren Zähler durch l teilbar sind. Die Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ in $k(\zeta)$ bilden eine \mathfrak{E} -Menge, wenn für $\sigma = 1, \dots, s$ die Einheit $E_{n_\sigma}(\zeta)$ mod \mathfrak{p}_σ kein l -ter Potenzrest in $k(\zeta)$ ist. Mittels dieses Begriffes lassen sich verschiedene Kriterien für die Unlösbarkeit der Fermatschen Gleichung formulieren, von denen wir hier nur ein einziges erwähnen: Es gebe in $k(\zeta)$ eine \mathfrak{E} -Menge von Primidealen, für jedes Primideal aus ihr gelte $N(\mathfrak{p}) < l^2$, $2^{(N(\mathfrak{p})-1)/l} \not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$. Dann ist die Fermatsche Gleichung unlösbar in $k(\zeta + \zeta^{-1})$. Eichler (Münster).

Fridlander, V. R.: Über die kleinsten Potenzreste. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 351—352 (1949) [Russisch].

Im Anschluß an Abhandlungen von Vinogradov und Linnik teilt Verf. einige weitere Formeln aus dem Gebiet der kleinsten Potenzreste mit. Brandt.

Venkataraman, C. S.: On von Sterneck-Ramanujan function. J. Indian math. Soc., n. S. 13, 65—72 (1949).

Verf. beweist einige elementare (fast triviale) Formeln, welche die Ramanujan-sche zahlentheoretische Funktion $c_M(N) = \sum \exp(2\pi i x N/M)$ (wo x ein reduziertes Restsystem modulo M durchläuft) enthalten. Kloosterman (Leiden).

Mahler, K.: On a theorem of Liouville in fields of positive characteristic. Canadian J. Math. 1, 397—400 (1949).

Es sei k ein beliebiger Körper, x eine Unbestimmte, $k[x]$ der Ring aller Polynome in x und $k(x)$ der Körper aller rationalen Funktionen in x mit Koeffizienten in k ; weiter $k\langle x \rangle$ der Körper aller formalen Reihen $z = a_f x^f + a_{f-1} x^{f-1} + \dots$ mit Koeffizienten a_f, a_{f-1}, \dots in k . Mit der Bewertung $|z| = e^f$ (falls $a_f \neq 0$), $|0| = 0$, gilt dann folgendes Analogon eines bekannten Satzes von Liouville [C. r. Acad. Sci., Paris 18, 883—885, 910—911 (1844)]: Falls z algebraisch vom Grade $n \geq 2$ über $k(x)$ ist, so gibt es eine Konstante $c > 0$ derart, daß $|z - a/b| \geq c/|b|^n$ für alle a und $b \neq 0$ aus $k[x]$. Verf. beweist weiter: Falls k die Charakteristik $p (\neq 0)$ hat, und $z = x^{-1} + x^{-p} + x^{-p^2} + \dots$,

$$a_n = x^{p^{n-1}} (x^{-1} + x^{-p} + \dots + x^{-p^{n-1}}), \quad b_n = x^{p^{n-1}},$$

so ist z algebraisch vom Grade p über $k(x)$, und es gilt $|z - a_n/b_n| = |b_n|^{-p}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \infty$.

Es kann also der Satz von Liouville für Grundkörper der Charakteristik p nicht in ähnlicher Weise verschärft werden, wie im Falle eines Grundkörpers der Charakteristik 0 [A. Thue, Norske Vid. Selsk. Skr. Nr. 7 (1908); C. L. Siegel, Math. Z. 10, 173—213 (1921); F. J. Dyson, dies. Zbl. 30, 21; B. P. Gill, Ann. Math., Princeton, II. S. 31, 207—218 (1930)]. Kloosterman (Leiden).

Analysis.

Mengenlehre:

Borel, Émile: Sur l'addition vectorielle des ensembles de mesure nulle. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 103—105 (1948).

„Somma vettoriale“ di due insiemi qualunque A, B di numeri reali, è chiamato l'insieme di tutte le somme $a + b$, con $a \in A, b \in B$. — Rispetto ad una

qualunque base di numerazione e ad un certo gruppo di p cifre della base (con $p < m$, ove m è il numero totale delle cifre della base), si chiama „insieme a definizione numerica“, l'insieme di tutti i numeri reali che si scrivono per mezzo di sole cifre del gruppo; il rapporto $\log p / \log m$ è la „rarefazione logaritmica“ dell'insieme. — L'A. enuncia il teor.: se la somma delle rarefazioni logaritmiche di più insiemi a definizione numerica è minore di uno, la somma vettoriale degli insiemi ha misura nulla. La tesi può cadere in difetto, se la somma delle rarefazioni logaritmiche è uguale a uno [Es.: sistema di numerazione decimale ($m = 10$); A = insieme dei numeri che si scrivono con le sole cifre 0, 1, 2, 3, 4 ($p = 5$); B = insieme dei numeri che si scrivono con le sole cifre 0,5 ($p = 2$)]. L'A. generalizza, come segue, il teor. enunciato. — Una funzione $f(x)$, positiva e crescente in un intervallo aperto I dell'asse reale, è detta ivi „moderatamente discontinua“, se le due funzioni $\lim_{h \rightarrow +0} f(x)/f(x-h)$, $\lim_{h \rightarrow +0} f(x+h)/f(x)$ sono limitate in I . Analoga

definizione per una funzione positiva e decrescente. — Sia E un insieme di misura nulla, contenuto in $[0, 1]$ e ivi ovunque non denso. Per un generico numero $x > 0$, consideriamo tutti gli intervalli contigui ad E , di lunghezza $\geq x$ (essi sono evidentemente in numero finito): sia $N(x)$ il numero degli intervalli rimanenti, sia $P(x)$ la lunghezza complessiva di questi. Supponiamo $N(x)$ e $P(x)$ moderatamente discontinue sul semiasse $x > 0$, e poniamo $\varrho(x) = \frac{\log N(x)}{\log N(x) - \log P(x)}$. Poniamo $\bar{\varrho}(E) = \max_{x \rightarrow +0} \lim \varrho(x)$. Vale il teor.: se E_1, E_2, \dots sono insiemi per i quali (oltre alle condizioni genericamente indicate per E) risulti $\bar{\varrho}(E_1) + \bar{\varrho}(E_2) + \dots < 1$, la somma vettoriale di tali insiemi ha misura nulla. Tullio Viola (Roma).

Borel, Émile: Sur la somme vectorielle des ensembles non parfaits de mesure nulle. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 545 (1948).

Alcune osservazioni complementari alle precedenti note dell'A. nello stesso vol. dello stesso periodico: pp. 103—105, 453—455 (1948); vedi la precedente recensione. Tullio Viola (Roma).

Borel, Émile: Sur une égalité numérique et sur l'addition vectorielle de certains ensembles. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1065—1066 (1948).

Prefissato un qualunque numero naturale n , si considerino tutte le coppie di numeri naturali q, q' primi fra loro e tali che: $q \leq n, q' \leq n, q + q' > n$. Risulta sempre (qualunque sia n) $\sum 1/qq' = \frac{1}{2}$. (Osservazione: ogni coppia q, q' è considerata non ordinata, cioè identica a q', q .) — Questa proposizione ha interesse per gli argomenti studiati dall'A. in precedenti note dello stesso vol. dello stesso periodico (pp. 103, 453, 545; vedi le recensioni precedenti). Tullio Viola (Roma).

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Buzano, Piero: Sulla definizione di limite. Archimede, Firenze **1**, 122—127 (1949).

L'A. richiama l'attenzione sopra i disparati aspetti con cui si presenta il concetto di limite, e che possono essere causa di disorientamento per lo studioso inesperto il quale non sappia riconoscere la loro unità. Per questo — dato il carattere divulgativo della rivista in cui è pubblicato l'articolo — l'A. segnala il metodo seguito dal prof. Mauro Picone nei suoi corsi all'Università di Roma: si tratta di una interessante ed acuta sistemazione logica, di vasta portata. Sopra di essa qualche riserva potrebbe forse essere fatta per quello che riguarda il suo valore didattico: ma l'A. non si occupa di questo lato del problema. Campedellic (Firenze).

Puig Adam, Pedro: Ein allgemeiner Satz über die Integrale zusammengesetzter Funktionen und seine geometrischen und physikalischen Anwendungen. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. **9**, 16—25 (1949) [Spanisch].

Soit $f(u_1, u_2, u_3)$ une fonction continue, définie dans un ensemble borné et

fermé de l'espace à 3 dimensions. Soient $u_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$) trois fonctions continues, définies dans l'intervalle borné et fermé $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Soit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$, $x_{j-1} \leq \xi_j', \xi_j'', \xi_j''' \leq x_j$, $y_{j-1} \leq \eta_j', \eta_j'', \eta_j''' \leq y_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), où les points (ξ_j', η_j') , (ξ_j'', η_j'') , (ξ_j''', η_j''') peuvent être égaux ou non. L'expression

$$\sum_{j=1}^n f(u_1(\xi_j', \eta_j'), u_2(\xi_j'', \eta_j''), u_3(\xi_j''', \eta_j''')) (x_j - x_{j-1}) (y_j - y_{j-1})$$

tend vers l'intégrale $\int_c^d \int_a^b f(u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y)) dx dy$ lorsque $\max(x_j - x_{j-1}) \rightarrow 0$ et $\max(y_j - y_{j-1}) \rightarrow 0$. Ce principe très simple est souvent employé pour établir quelques intégrales qui définissent des grandeurs géométriques ou physiques, comme

par exemple la longueur d'arc $s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$ d'une courbe, l'aire d'une surface, le moment statique ou d'inertie d'un corps, le travail exercé par une force, etc. Horváth (Paris).

Dinghas, Alexander: Über einen Satz von Felix Behrend. Math. Nachr., Berlin 2, 141—147 (1949).

Verf. überträgt das bekannte Theorem von F. Behrend (dies. Zbl. 11, 77), wonach für $\varepsilon > 0$ die äußere Parallelmenge M_ε einer beliebigen beschränkten Punktmenge M des euklidischen Raumes stets einen Jordanschen Inhalt hat, auf Räume R_n konstanter (positiver und negativer) Krümmung. Geeignete Koordinaten, welche in einem Modellraum E_n euklidisch sind, gestatten es, den nicht-euklidischen Inhalt einer Punktmenge M von R_n als Inhalt der Bildpunktmenge M' im euklidischen Modellraum E_n darzustellen; M besitzt einen Jordanschen Inhalt, falls M' einen solchen aufweist. — Nun ist die Bildmenge M'_ε der äußeren Parallelmenge M_ε selbst nicht eine Parallelmenge von M' ; jedoch gelingt es auf Grund einer sich auf Distanzen beziehenden Doppelungleichung, die Behrend'sche Beweiskonstruktion nach geeigneter Modifikation zu übertragen. H. Hadwiger (Bern).

Brodskij, M. L.: Über einige Eigenschaften der Mengen von positivem Maße. Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 3 (31), 136—138 (1949) [Russisch].

Es wird folgender Satz bewiesen: $z = f(x, y)$ besitze in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetige partielle Ableitungen nach beiden Variablen $\neq 0$. M, N seien Mengen positiven Maßes, so daß x_0 ein Dichtepunkt von M und y_0 ein solcher von N ist. Dann gibt es eine Umgebung U von $z_0 = f(x_0, y_0)$, so daß jeder Punkt $z \in U$ gemäß $z = f(x, y)$ mit $x \in M$, $y \in N$ erhalten werden kann. Der Beweis benützt die Tatsache, daß man den Raum der meßbaren Mengen durch die Abstandsdefinition $\rho(M, N) = M(M - N) + M(N - M)$ ($M = \text{Maß}$) metrisieren kann. Ohne Beweis wird eine Erweiterung auf den Fall von $m - 1$ Funktionen in m Veränderlichen angegeben sowie eine Milderung der Voraussetzungen für den Fall $m = 2$. Durch Angabe von kurz skizzierten Gegenbeispielen wird dargetan, daß diese Voraussetzungen die „Besten“ sind. Es werden verschiedene Anwendungen angedeutet, z. B. daß die Projektion des topologischen Produktes T von n eindimensionalen Mengen positiven Maßes auf eine Hyperebene mit der Projektion eines Dichtepunktes von T zugleich eine ganze Umgebung enthält, der durchweg Punkte aus T entsprechen. Querverbindungen zu einem von Schnirelman und Raikov behandelten Problemkreis werden aufgezeigt [D. A. Raikov, Mat. Sbornik, n. S. 5, 425—438 u. engl. Zusammenfassg. 439—440 (1939); dies. Zbl. 22, 210] und L. Schnirelman, ebenda 211—214; dies. Zbl. 21, 207]. Schließlich wird der Satz bewiesen: Jede n -dimensionale Menge positiven Maßes enthält das topologische Produkt einer $(n - k)$ -dimensionalen Menge positiven Maßes und k perfekter nirgendsdichter eindimensionaler Mengen, $k = 1, 2, \dots, n$. Schmetterer (Wien).

Verčenko, I. Ja.: Inhaltstheoretische Untersuchungen von Flächen der Form $z = w(x, y)$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 5—8 (1949) [Russisch].

Die Arbeit beschäftigt sich mit stetigen Flächen der Form $z = w(x, y)$ im Rahmen jener Inhaltstheorie, wie sie etwa bei Saks, Theory of the integral, 2. Aufl., Warszawa-Lwow 1937 (dies. Zbl. 17, 300), V. Kapitel, dargeboten wird. Verf. bedient sich hierbei eines von ihm eingeführten Flächenmaßes [I. A. Verčenko, Mat. Sbornik, n. S. 10, 11—32 (1942) (russisch, mit deutscher Zusammenfassg.)], welches, kurz beschrieben, die Orthogonalprojektion von $w(x, y)$ auf die XY -Ebene mißt. Weiterhin soll $z = w(x, y)$ immer eine auf einem Rechteck J_0 definierte stetige Fläche endlichen Inhalts sein. Für $X \subset J_0$ sei das Flächenmaß mit $\mu(X)$ bezeichnet. Das Koordinatensystem x, y werde um den Winkel τ gedreht ($0 \leq \tau < 2\pi$) und gehe in ein ξ, η -System über. $V \subset J_0$ sei eine abgeschlossene, konvexe Menge. Orthogonalprojektion von V auf die ξ -Achse liefere das Intervall $\alpha \leq \xi \leq \beta$. Durch die α und β entsprechenden Projektionsstrahlen zerfällt die Begrenzung von V in zwei Kurven $\eta_1(\xi), \eta_2(\xi)$, definiert auf $\alpha \leq \xi \leq \beta$. Sei nun

$$g^\tau(V) = \int_{\alpha}^{\beta} [w^\tau(\xi, \eta_1) - w^\tau(\xi, \eta_2)] d\xi,$$

wobei w^τ den $w(x, y)$ entsprechenden Ausdruck im ξ, η -System bezeichnet. $g^\tau(V)$ ist eine totaladditive Mengenfunktion im Bereich der Mengen V . Für ein Rechteck

$J\{\alpha_1 \leq x \leq \beta_1, \alpha_2 \leq y \leq \beta_2\} \subset J_0$ seien $g(J) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} [w(x, \beta_2) - w(x, \alpha_2)] dx$ und

$h(J) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} [w(\alpha_1, y) - w(\beta_1, y)] dy$ die bekannten Ausdrücke von Geöcze. Ein

Punkt der Fläche heißt regulär, wenn die Derivierten $g', h', g^{\tau'}$ von $g(J), h(J), g^\tau(V)$ für alle τ hinsichtlich des Maßes μ in diesem Punkte existieren und die Beziehung $g^{\tau'} = g' \cos \tau + h' \sin \tau$ erfüllen. Es werden nun mehrere Sätze ohne Beweis angeführt, z. B. $w(x, y)$ ist in allen Punkten von J regulär, ausgenommen höchstens eine Menge vom Flächenmaße 0. Eine Reihe weiterer Sätze beruhen auf dem Lemma: Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann ein System endlich vieler achsenparalleler Rechtecke R_i bestimmt werden, die alle in J_0 enthalten sind und folgende Eigenschaften aufweisen: 1. Sie sind paarweise fremd, 2. $w(x, y)$ ist auf der Begrenzung jedes R_i jeweils von beschränkter Variation in jener Variablen, welche dort variiert, 3. Oberer und unterer Limes des Ausdruckes

$$\iint_{R_i} \left\{ \left[\frac{w(x + \varrho \cos \tau_i, y + \varrho \sin \tau_i) - w(x, y)}{\varrho} \right]^2 + \left[\frac{w(x - \varrho \sin \tau_i, y + \varrho \cos \tau_i) - w(x, y)}{\varrho} \right]^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} dx dy$$

$$= \iint_{R_i} W(\tau_i) dx dy$$

für $\varrho \rightarrow 0$ unterscheiden sich höchstens um $\varepsilon \mu(R_i)$ vom Flächenmaße $\mu(R_i)$. Hierbei ist τ_i durch die Richtung einer Diagonale von R_i erklärt. 4. Oberer und unterer Limes von

$$\iint_E \left\{ \left[\frac{w(x + \varrho, y) - w(x, y)}{\varrho} \right]^2 + \left[\frac{w(x, y + \varrho) - w(x, y)}{\varrho} \right]^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} dx dy$$

unterscheiden sich für $\varrho \rightarrow 0$ höchstens um ε von $\mu(E)$ mit $E = J_0 - \sum R_i$. Aus diesem Lemma folgt ein Beweis für die Darstellung des Inhaltes einer beliebigen stetigen Fläche in der allgemeinen Form von L. C. Young (vgl. Saks, l. c., p. 182). Wir greifen noch die beiden Sätze heraus: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Funktion $\tau(x, y)$, definiert auf J , welche dort nur endlich viele Werte annimmt, so daß der

obere und untere Limes von $\iint_{J_0} W(\tau) dx dy$ für $\varrho \rightarrow 0$ sich höchstens um ε vom Flächeninhalt der vorgelegten Fläche w unterscheiden. Weiter: Es gibt eine Folge eingeschriebener polyedrischer Flächen, die auf J_0 gleichmäßig gegen $w(x, y)$ streben und für die der Limes der Flächeninhalte gleich dem Inhalt von w auf J_0 ist (Lösung des Problems von Geöcze). Schmetterer (Wien).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Nassif, M.: On the mode of increase of the basic sets of polynomials. Amer. J. Math. **71**, 40—49 (1949).

Die Polynomfolge $\{p_n(z)\}$ sei eine Basis aller Polynome und nach wachsendem Grad geordnet. Die Art ihres Wachstums wird durch zwei Zahlen charakterisiert, die Ordnung ω und den Typus γ . Zwei solchen Folgen $\{p_n(z)\}$ und $\{q_n(z)\}$ wird eine Produktfolge $\{u_n(z)\}$ zugeordnet. Die Koeffizienten der p_n, q_n und u_n bilden nämlich je eine zeilenfinit Matrix $(p_{ni}), (q_{ni})$ und (u_{ni}) und es ist dann $(u_{ni}) = (p_{ni}) (q_{ni})$. Verf. beweist Sätze von folgender Art: Sind die Folgen $\{p_n\}$ und $\{q_n\}$ bzw. von der Ordnung ω_1 und ω_2 , so ist die Produktfolge höchstens vom Minimaltypus der Ordnung $\omega_1 + 2\omega_2$. A. Pfluger (Zürich).

Eweida, M. T.: The lower bound of the order of a product set of polynomials. Duke math. J. **16**, 119—123 (1949).

Die Polynomfolge $\{p_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (1), worin $p_n(z)$ den Grad n hat, heißt eine Basis, wenn jedes beliebige Polynom auf eine und nur eine Weise als endliche Linearkombination der $p_n(z)$ mit konstantem Koeffizienten ausgedrückt werden kann.

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} (\log \omega_n(R) / n \log n)$$

$$\text{mit } \omega_n(R) = \sum_i |\pi_{ni}| M_i(R), \quad M_n(R) = \max_{|z|=R} |p_n(z)| \text{ und } z^n = \sum_i \pi_{ni} p_i(z)$$

nennt man die Ordnung der Basis (1). Ist $p_n(z) = \sum_{i=0}^n p_{ni} z^i$, so sollen $P \equiv (p_{ij})$ die Koeffizienten- und $\Pi \equiv (\pi_{ij})$ die Operatormatrix der Basis (1) heißen. Ist $\{q_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) eine zweite Polynomfolge, welche ebenfalls eine Basis ist, und sind $Q \equiv (q_{ij})$ ihre Koeffizienten- und $\Lambda \equiv (\lambda_{ij})$ ihre Operatormatrix, dann sind die Produktmatrizen (PQ) und $(\Lambda \Pi)$ die Koeffizienten- und Operatormatrix einer neuen basischen Polynomfolge $\{u_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

$$\{u_n(z)\} \equiv \{p_n(z)\} \cdot \{q_n(z)\}$$

heißt das Produkt der beiden Basisfolgen $\{p_n(z)\}$ und $\{q_n(z)\}$. Sind ω_1, ω_2 und Ω die Ordnungen von $\{p_n(z)\}, \{q_n(z)\}$ und $\{u_n(z)\}$, so hat Nassif [Proc. math. phys. Soc. Egypt. **3**, 43 (1946)] bewiesen, daß $\Omega \leq (\omega_1 + 2\omega_2)$ ist, wenn der Koeffizient von z^n in $q_n(z)$ gleich 1 ist. Verf. beweist in der vorliegenden Arbeit, welche von Whittaker angeregt und gefördert wurde, die folgenden beiden Theoreme über die untere Grenze von Ω . Ist $0 \leq \omega_1 < \omega_2/2$, dann gilt

$$\frac{1}{2} \omega_2 - \omega_1 \leq \Omega \leq \omega_1 + 2\omega_2,$$

wenn die Koeffizienten von z^n in $p_n(z)$ und $q_n(z)$ gleich 1 sind. Ist dagegen $\omega_1/2 > \omega_2 \geq 0$, so hat man $\omega_1 - 2\omega_2 \leq \Omega \leq \omega_1 + 2\omega_2$, vorausgesetzt, daß z^n in $q_n(z)$ den Koeffizienten 1 besitzt. An Beispielen wird gezeigt, daß die unteren Grenzen in den beiden angeführten Sätzen nicht verbessert werden können.

Lammel (Tutzing).

Lewis, D. C.: Polynomial least square approximations. Amer. J. Math. **69**, 273—278 (1947).

Verf. denkt sich eine Anzahl monoton nicht abnehmender Funktionen $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ in einem Intervall (a, b) definiert und betrachtet nun zu einer

gegebenen Funktion $f(x)$ den Ausdruck

$$S = \sum_{k=0}^p \int_a^b [f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)]^2 d\alpha_k(x).$$

Das darin auftretende Polynom $P_n(x)$ n -ten Grades soll so bestimmt werden, daß S ein Minimum wird. $P_n(x)$ läßt sich eindeutig bestimmen, wenn die quadratische Form

$$\sum_{k=0}^p \int_a^b \left[\frac{d^k}{dx^k} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \right]^2 d\alpha_k(x)$$

in den Veränderlichen a_1, \dots, a_n positiv definit ist. Verf. zeigt zunächst, daß das „beste Approximationspolynom“ $P_n(x)$ eines Polynoms $f(x)$ dieses Polynom selbst ist, und skizziert dann einen Beweis seines Hauptsatzes: Unter gewissen einfachen Voraussetzungen über $f(x)$ existiert eine von $f(x)$ unabhängige Funktion $G_n^m(x, t)$ ($p \leq m \leq n$) derart, daß

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{m!} \int_a^b G_n^m(x, t) df^{(m)}(t) + \frac{1}{m!} \int_a^x (x-t)^m df^{(m)}(t) dt,$$

für jedes x eines Intervalles $A \leq a < b \leq B$, und zwar ist $G_n^m(x, t)$ dasjenige Polynom höchstens n -ten Grades in x , das die Funktion $g_m(x, t) = (x-t)^m$ für $x \leq t$, $= 0$ für $x > t$ in dem oben erklärten Sinn bestens approximiert. — Wie Verf. bemerkt, umfaßt diese Form der Approximation zahlreiche speziellere, z. B. die durch Lagrangesche Interpolationspolynome, durch allgemeine Tschebyscheffsche Polynome sowie die Näherung durch die Taylor-Entwicklung. *W. Hahn.*

Nikol'skij, S.: Über die beste Annäherung von Funktionen, deren s -te Ableitung Unstetigkeiten erster Art hat. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 55, 99—102 (1947) [Russisch].

Die reelle Funktion $f(x)$ lasse die Darstellung

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i |x - a_i|^s, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |A_i| < \infty, \quad s > 0, \quad -1 < a_1 < \dots < a_i < +1,$$

zu. Dann gilt für die beste Annäherung $E_n(f)$ der Funktion durch Polynome n -ten Grades die asymptotische Beziehung $E_n(f) = \kappa \mu(s)/n^s$ ($n \rightarrow \infty$), wobei $\mu(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s E_n(|x|^s)$, $\kappa = \max_{1 \leq i < \infty} |A_i| (1 - a_i^2)^{s/2}$. Verf. beweist dies im Anschluß an

Bernstein, der das entsprechende Resultat ermittelt hatte, wenn die Darstellung von $f(x)$ nur endlich viele Terme aufweist [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 18, 379—384 (1938); dies. Zbl. 19, 405]. Weiterhin stellt Verf. eine asymptotische Beziehung für $E_n(f)$ auf, wenn die ersten $2s$ Ableitungen von $f(x)$ absolut stetig sind und die $(2s+1)$ -te sich als Integral über eine Funktion mit gewissen Unstetigkeiten darstellen läßt. *W. Hahn (Berlin).*

Nikol'skij, S. M.: Über die asymptotisch beste lineare Methode der Annäherung differenzierbarer Funktionen durch Polynome. Doklady Akad. Nauk. SSSR, n. S. 69, 129—132 (1949) [Russisch].

Im engen Anschluß an frühere Veröffentlichungen (dies. Zbl. 29, 121, 122; 30, 28) erläutert Verf. die „asymptotisch beste lineare Annäherungsmethode“. Hat $f(x)$ in $(-1, +1)$ eine r -te Ableitung, so liefert der Taylorsche Satz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!} (x+1)^k + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{+1} \mu_{r-1}(x-t) f^{(r)}(t) dt.$$

Darin ist $\mu_{r-1}(y)$ der Kern $\frac{1}{2} (y + |y|) |y|^{r-2}$. Das Hauptglied der Entwicklung hängt linear von $f(x)$ ab; das Restglied $g(x)$ wird durch ein passend angesetztes Polynom „bestens“ angenähert, wobei die Unstetigkeit des Kernes und

ihre Kompensation durch eine Fourier-Reihe [wie bei diesem Kern zu erwarten, handelt es sich im wesentlichen um $\sum_1^{\infty} (\sin ky)/k$] eine Rolle spielt. Die gewonnene Annäherung sieht dann so aus:

$$|g(x) - P_{n-1}(x)| < \frac{A_r}{n^r} + O\left(\frac{\log n}{n^{r+1}}\right).$$

W. Hahn (Berlin).

Mergeljan, C. N.: Über die besten Annäherungen im komplexen Gebiet. (Diss. mat. Inst. Steklov.) Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 5 (33), 202—204 (1949) [Russisch].

Verf. teilt ohne Beweise die Ergebnisse aus einer größeren Arbeit mit. Untersucht wird u. a. der Einfluß des Gebietsrandes auf die Schnelligkeit der Annäherung durch Polynome, ferner die gleichzeitige Annäherung in zwei verschiedenen Gebieten. Beispielsweise kann man unter gewissen Voraussetzungen aus der Konvergenz einer Polynomenfolge in dem einen Gebiet auf die im anderen Gebiet schließen und dadurch für die Grenzfunktion eine „quasianalytische“ Fortsetzung gewinnen. — Eine Anwendung der Ergebnisse gestattet, die Konvergenz der Bieberbachschen Polynome (in glattrandig begrenzten Gebieten) zu beweisen. *Hahn*.

Rappoport, S. I.: Über gewisse abgeänderte Summationsformeln. Mat. Sbornik, n. S. 24, 87—100 (1949) [Russisch].

L. Kantorowitsch hat die folgenden Begriffe eingeführt: 1. Das „metrische Mittel“ (moyenne métrique) bezüglich (α, β) der meßbaren Funktion $f(x)$ ist $m(\alpha, \beta) m\{f(x)\} = h$, wenn $ME(f(x) \geq h) \geq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ und $ME(f(x) \geq h + \varepsilon) < \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ für alle $\varepsilon > 0$. 2. $f(x)$ ist „approximativ-stetig“ in x_0 , wenn $ME(|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon, |x - x_0| < h) < h/2$ für alle $\varepsilon > 0$ und für alle $0 < h < h_0(\varepsilon)$ [Mat. Sbornik, n. S. 41, 503—506 (1934); dies. Zbl. 11, 15]. Verf. beweist den Satz: Seien die Grundpunkte $x_k^{(n)}$ ($a \leq x_k^{(n)} \leq b$) und die positiven Grundfunktionen $\varphi_k^{(n)}(x) \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$) so gewählt, daß die Approximationsformel

$$(1) \quad A_n(f, x) = \sum_{k=1}^n \varphi_k^{(n)}(x) f(x_k^{(n)})$$

für stetiges $f(x)$ gleichmäßig nach $f(x)$ konvergiert. Sei weiter

$$[f(x)]_{\mu} = \begin{cases} f(x), & \text{wenn } |f(x)| \leq \mu, \\ +\mu, & \text{wenn } f(x) > \mu, \\ -\mu, & \text{wenn } f(x) < -\mu. \end{cases}$$

Es gibt dann solche $\delta_n \rightarrow 0$ und $\mu_n \rightarrow \infty$, daß die Funktionenfolge

$$A_n^*(f, x) = \sum_{k=1}^n \varphi_k^{(n)}(x) m(x_k^{(n)} - \delta_n, x_k^{(n)} + \delta_n) m\{[f(x)]_{\mu_n}\}$$

in den Punkten, wo die meßbare $f(x)$ approximativ-stetig ist, gegen $f(x)$ konvergiert (d. h. fast überall im $a \leq x \leq b$). L. Kantorowitsch hat den Satz für die Bernsteinschen Polynome, d. h. für $x_k^{(n)} = k/n$ und $\varphi_k^{(n)}(x) = x^k (1-x)^{n-k}$, mit $\delta_n = 3n^{-1/2}$, $\mu_n = n$ schon früher bewiesen [loc. cit. und C. r. Acad. Sci. URSS 1930, 563—568, 595—600]. — Verf. zeigt mit Hilfe eines Gegenbeispiels, daß man den Satz für $\varphi_k^{(n)}(x) \geq 0$ nicht verallgemeinern kann. Weitere Gegenbeispiele zeigen, daß zwei frühere Ergebnisse von L. Kantorowitsch und vom Verf. [bezüglich $x_k^{(n)} = k/n$, $\varphi_k^{(n)}(x) = x^k (1-x)^{n-k}$ bzw. auf $x_k^{(n)} = 2\pi k/(2n+1)$, $\varphi_k^{(n)}(x) = \cos^{2n} \frac{1}{2}(x_k - x)$] für den Fall (1) nicht zu verallgemeinern sind [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 56, 11—12 (1947) und L. Kantorowitsch, C. r. Acad. Sci. URSS 1930, 563—568]. (Die Vertauschung der Zeichen $<$ und \leq und einige andere Druckfehler sind störend.)

Gál (Paris).

Morse, Marston and William Transue: The Fréchet variation and the convergence of multiple Fourier series. Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 395—399 (1949).

This is one of a long series of papers on Fréchet variation, multilinear functionals and multiple Fourier series which the a.u.s. are publishing. Here an abstract of some of the results is given. Let $k(x_1, \dots, x_n)$ be a function defined on the n -dimensional rectangle $J_1 \times \dots \times J_n = R$ (the J_v are one-dimensional intervals). Subdivide each J_v in disjoint intervals $J_{v,1}, \dots, J_{v,\mu_v}$; for the rectangle $J_{1,\mu_1} \times \dots \times J_{n,\mu_n}$ form the n -dimensional increment $\Delta_{\mu_1, \dots, \mu_n} k$ of the function k . Then the Fréchet variation of k in R is the least upper bound of the sum $\sum e_{\mu_1} \dots e_{\mu_n} \Delta_{\mu_1, \dots, \mu_n} k$ for all possible subdivisions and all numbers $e_{\mu_v} = \pm 1$ (the ordinary Vitali variation is obtained by replacing this sum by $\sum |\Delta_{\mu_1, \dots, \mu_n} k|$).—The a.u.s. state some properties of functions which have a finite Fréchet variation. The applications are as follows. A functional $F(f_1, \dots, f_n)$ defined on the product $C \times \dots \times C$ of the Banach space C by itself is called multilinear, if F is additive and homogenous in each variable and if (*) $|F(f_1, \dots, f_n)| \leq M \|f_1\| \dots \|f_n\|$. The general form of a multilinear functional is an iterated Riemann-Stieltjes integral [for $n = 2$ this is due to Fréchet, Trans. Amer. math. Soc. **16**, 215—244 (1915)]; the minimal value of M in (*) is the Fréchet variation of the generating function. Finally, for multiple Fourier series the a.u.s. give generalizations of the Dirichlet-Jordan convergence theorem and of a convergence test by Gergen [Trans. Amer. math. Soc. **35**, 29—63 (1933); this Zbl. **6**, 112].

G. G. Lorentz (Toronto).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Pollard, Harry: The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_\alpha(-x)$. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 1115—1116 (1948).

Für die Mittag-Lefflersche Funktion $E_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\alpha k + 1)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, gilt in

der linken Halbebene $\Re z \leq 0$ die Darstellung $E_\alpha(z) = \int_0^{\infty} e^{zt} \cdot dF_\alpha(t)$, wobei $F_\alpha(t)$ monoton wachsend und beschränkt ist. Dieses von W. Feller mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden gefundene Resultat beweist Verf. mit geläufigen funktionentheoretischen Mitteln. Er findet

$$F'_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sin k\alpha\pi \cdot \Gamma(\alpha k + 1) \cdot t^{k-1}.$$

Insbesondere folgt, daß $E_\alpha(z)$ keine reellen Nullstellen hat. A. Pfluger (Zürich).

Pollaczek, Félix: Familles de polynomes orthogonaux. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 36—37 (1950).

Kurze Mitteilung über die durch die Rekursionsformel

$$n(n+a-1)P_n(z) = (2z(n+a)(n+a-1) + (n+a-1)b - \gamma a)P_{n-1}(z) - (n+a)(n+c-1)P_{n-2}(z)$$

erklärten Orthogonalpolynome; γ bezeichnet darin eine Wurzel der Gleichung $a\gamma^2 + b\gamma + a - c = 0$. Die Belegungsfunktion sowie eine erzeugende Funktion werden angegeben.

W. Hahn (Berlin).

Sips, Robert: Représentation asymptotique des fonctions de Mathieu et des fonctions d'onde sphéroïdales. Trans. Amer. math. Soc. **66**, 93—134 (1949).

Für die 2π -periodischen Mathieuschen Funktionen als Lösungen der Differentialgleichung $y'' + (a - \frac{1}{2}\gamma^2 \cos 2\eta)y = 0$ und die in ± 1 endlichen Sphäroid-Funktionen als Lösungen der Differentialgleichung

$$(1 - \eta^2)y'' - 2\eta y' + \left(a - \gamma^2 \eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2}\right)y = 0$$

in $-1 \leq \eta \leq +1$ ($m = \text{ganz}$) und für die zugehörigen Eigenwerte a werden asymptotische Darstellungen für große positive und negative γ^2 gegeben, die nach fallenden Potenzen von γ fortschreiten. Das Verfahren beruht im wesentlichen auf einer Entwicklung nach Hermiteschen bzw. Laguerreschen Orthogonalfunktionen, wie sie bereits vom Ref. (dies. Zbl. 32, 276) angegeben wurde. Die Entwicklungskoeffizienten sind teils weiter, teils weniger weit als in der Arbeit des Ref. berechnet. Die Beweise benützen die Entwicklungssätze für Mathieusche und für Sphäroid-Funktionen. — (Implizit wird vorausgesetzt, daß die Eigenwerte bestimmter Symmetrie für $\gamma^2 \rightarrow \pm \infty$ nicht zu stark zusammenlaufen. Der angegebene Beweis für die asymptotische Approximation der Eigenfunktionen dürfte nur im quadratischen Mittel gelten; jedoch kann man über die Integralgleichungen für die Mathieuschen bzw. Sphäroid-Funktionen leicht auf die asymptotische Approximation für jedes η schließen. Ref.)

J. Meixner (Aachen).

Funktionentheorie:

Nöbeling, Georg: Eine allgemeine Fassung des Hauptsatzes der Funktionentheorie von Cauchy. Math. Ann., Berlin 121, 54—66 (1949).

Verf. beweist den Cauchyschen Integralsatz in folgender allgemeiner Fassung. In der z -Ebene sei C eine geschlossene, stetige Kurve, welche eine endliche Länge besitzt. Sei (1) $\Delta \arg(z - z_0)$ beschränkt, wenn z die Kurve C durchläuft und z_0 ein Punkt ist, der nicht auf C liegt. O sei die Menge derjenigen Punkte z_0 , für welche (1) $\neq 0$ ist; O kann auch leer sein. Ist dann $f(z)$ eine eindeutige, stetige Funktion, welche in O regulär analytisch ist, so ist $\int_C f(z) dz = 0$. Verf. zeigt noch, daß es,

statt $f(z)$ in ganz O als regulär vorauszusetzen, genügt, daß $f(z)$ in $O - D$ regulär ist, wobei D eine in O abgeschlossene Teilmenge von O mit verschwindendem linearem Carathéodory-Maß ist. — Der Beweis wird unter Anwendung des Lebesgueschen Integralbegriffs ausgeführt. — Der Satz ist schon früher in dem spezielleren Fall bewiesen, daß C einfach geschlossen ist [Pollard, Proc. London math. Soc. 21, 456—482 (1923) und Heilbronn, Math. Z. 37, 37—38 (1933); dies. Zbl. 6, 260].

V. Paatero (Helsinki).

Roussel, André: Sur les développements tayloriens d'une fonction. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 500—502 (1948).

Es wird die Verallgemeinerung der Taylorsche Entwicklung einer Funktion $f(s)$ abgeleitet in der Form

$$(1) \quad f(x) = f(a) + g(a; x-a) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a; x-a).$$

Dabei bedeutet $g = g(x; h)$ eine Funktion der beiden komplexen Variablen x und h , die in den beiden Kreisen C und C' mit den Radien R und R' regulär ist, wo C in der x -Ebene liegt und den Mittelpunkt $x = a$ hat und C' in der h -Ebene liegt und den Mittelpunkt $h = 0$ hat. Für natürliches n erhält man $g_n(x; h)$, indem man g zuerst n -mal nach h von 0 bis h integriert und dann das Ergebnis n -mal nach x differenziert. Für ganzes $n \leq -1$ erhält man $g_n(x; h)$, indem man g zuerst n -mal nach h differenziert und dann das Ergebnis n -mal nach x von a bis x integriert. Um nun eine in einer Umgebung von a analytische Funktion $f(x)$ durch eine „Taylorsche Entwicklung“ der Form (1) darzustellen, ist die Funktion $g(x; h)$ aus der Integralgleichung

$$(2) \quad g(a; x-a) + \int_0^{x-a} \frac{\partial g(x-t; t)}{\partial x} dt = f(x) - f(a)$$

zu bestimmen. Als Lösung von (2) ergibt sich, wenn $K(s; t)$ ein in einer Umgebung von $s = 0; t = 0$ analytischer Kern ist,

$$(3) \quad g(x; h) = -u(h) \int_0^{x-a+h} K(\sigma; h) d\sigma + u(h),$$

wo $u(s)$ der Integralgleichung

$$(4) \quad u(s) - \int_0^t K(s; t) u(t) dt = f(a + s) - f(a)$$

genügt. Die klassische Taylorsche Entwicklung von $f(s)$ ist ein Spezialfall hiervon, wenn man $K(s; t) = -f'(a + s - t)/f'(a)$ setzt. *E. Göllnitz (Chemnitz).*

Doss, Shafik: Sur le comportement asymptotique des zéros de certaines fonctions d'approximation. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 64, 139—178 (1947).

Ist $\{f_n(z)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) eine auf einem abgeschlossenem Bereich \mathfrak{B} gleichmäßig konvergente Folge auf \mathfrak{B} regulärer Funktionen, so ist bekanntlich die Grenzfunktion $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$

auf \mathfrak{B} stetig und im Inneren von \mathfrak{B} regulär. Hurwitz hat folgenden Zusammenhang der Nullstellen von $f(z)$ mit den Nullstellen von $f_n(z)$ gefunden: Hat $f(z)$ auf der Berandung von \mathfrak{B} keine Nullstellen, so haben $f(z)$ und $f_n(z)$ für hinreichend großes n im Inneren von \mathfrak{B} die gleiche Anzahl von Nullstellen, wenn jede von ihnen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt wird. — Ist insbesondere ζ ein innerer Punkt von \mathfrak{B} , in welchem $f(z)$ eine k -fache Nullstelle besitzt, so hat $f_n(z)$ für hinreichend großes n in jeder Umgebung von ζ , welche keine weiteren Nullstellen von $f(z)$ enthält, genau k Nullstellen $\{\zeta_{ni}\}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), welche in der Reihenfolge angeschrieben sind, daß $|\zeta_{ni} - \zeta|$ mit wachsendem i nicht abnimmt. Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_{ni} = \zeta$ für $1 \leq i \leq k$.

In der von Fekete angeregten und geförderten Abhandlung studiert Verf. das asymptotische Verhalten von $|\zeta_{ni} - \zeta|$ für gewisse Funktionsklassen $f(z)$, wobei die $f_n(z)$ zu $f(z)$ gehörige Approximationsfunktionen sind. — Im ersten Kapitel seiner Arbeit betrachtet Verf. die Klasse

der durch eine Potenzreihe gegebenen Funktionen $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$, $a_0 \neq 0$ (1) und wählt als

Approximationsfunktionen $f_n(z)$ die Partialsummen der Potenzreihe. Über das asymptotische Verhalten der Nullstellen von $f_n(z)$ wird bewiesen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} |\zeta_{ni} - \zeta|^{k/n} = |\zeta|/\varrho$; $1 \leq i \leq k$,

wenn der Konvergenzradius ϱ von (1) endlich ist. Ist (1) eine ganze Funktion von der Ordnung r , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\zeta_{ni} - \zeta|^{k/n \log n} = e^{-1/r}; \quad 1 \leq i \leq k.$$

Im zweiten Kapitel werden für die Funktion (1) als Approximationsfunktionen statt der Partialsummen $f_n(z)$ ihre durch

$$f_n^{[r]}(z) = \sum_{s=0}^n \binom{n+r-s-1}{r-1} f_s(z) \binom{n+r}{r}$$

definierten Cesàroschen Mittel ganzzahliger positiver Ordnung r herangezogen. Mit Hilfe der von Fekete stammenden Formel

$$(2) \quad f_n^{[r]}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r}} \frac{d^r}{dz^r} \left\{ \frac{f_n(z)}{z^{n+1}} \right\}$$

wird gezeigt, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \zeta/\zeta_{ni}) = \alpha_i$, $1 \leq i \leq k$ (3) ist, wenn $r \leq k$ und α_i eine der paarweise voneinander verschiedenen, sämtlich reellen und positiven Wurzeln des Polynoms

$$(4) \quad L_{rk}(z) = \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} \binom{r}{s} s! z^{k-s}$$

bezeichnet, wobei die Wurzeln α_i analog den ζ_{ni} in steigender Folge angeordnet sind. Im Falle $1 \leq r \leq k-1$ hat man für $1 \leq i \leq k-r$ $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \zeta/\zeta_{ni}) = 0$ (5), genauer $\lim_{n \rightarrow \infty} |\zeta_{ni} - \zeta|^{(k-r)/n} = |\zeta|/\varrho$ und für $1 \leq j \leq r$ $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \zeta/\zeta_{n, k-r+j}) = \alpha_j$ (6), wenn α_j die j -te Nullstelle des durch (4)

definierten Polynoms $L_{kr}(z)$ ist. Über den Grad der Approximation von $f(z)$ durch die Cesàroschen Mittel $f_n^{[r]}(z)$ an einer inneren Stelle $\tilde{\zeta}$ des Konvergenzkreises von (1) beweist Verf., daß für $k \leq r$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n^{[r]}(\tilde{\zeta}) - f(\tilde{\zeta})\} n^k = (-1)^k \tilde{\zeta}^k \binom{r}{k} f^{(k)}(\tilde{\zeta})$$

und für $k > r$ $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n^{[r]}(\tilde{\zeta}) - f(\tilde{\zeta})|^{1/n} = |\tilde{\zeta}|/\varrho$ ist, wenn $f(z) - f(\tilde{\zeta})$ an der Stelle $z = \tilde{\zeta}$ eine k -fache

Nullstelle besitzt. — Im dritten Kapitel wählt Verf. als Approximationsfunktionen für die durch (1) gegebene Funktion $f(z)$ die ihr durch Fekete zugeordneten Jensenschen Polynome

$$j_0^{(r)}(z) = a_0, \quad j_1^{(r)}(z) = a_0 + a_1 z \quad \text{und} \quad j_n^{(r)}(z) = a_0 + a_1 z + \sum_{v=2}^n \prod_{\mu=1}^{v-1} (1 - \mu/n) a_v z^v \quad \text{für } n \geq 2.$$

Es wird bewiesen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\zeta_{ni}/\zeta - 1} = \alpha_i$, $1 \leq i \leq k$, ist, worin α_i die i -te Nullstelle

des Hermiteschen Polynoms k -ten Grades bedeutet, wenn seine Nullstellen in einer gewissen Reihenfolge numeriert werden. — Im vierten Kapitel werden die Ergebnisse des zweiten Kapitels in folgender Weise verallgemeinert: Es sei $\{\varphi_n(z)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) (7) eine im Bereich \mathfrak{B} gleichmäßig konvergente Folge regulärer Funktionen und $\varphi(z)$ die im Innern von \mathfrak{B} reguläre Grenzfunktion. Der Folge (7) ordnet Verf. die Folge $\{\varphi_n^{[r]}(z)\}$, ($n = 1, 2, \dots$) (8) zu, wobei sich

$\varphi_n^{[r]}(z)$ aus $\varphi_n(z)$ nach (2) auf dieselbe Weise wie $f_n^{[r]}(z)$ aus $f_n(z)$ berechnet. Die Folge (8) nennt Verf. eine Feketesche Folge von der Ordnung $r \geq 1$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Folge (7) in \mathfrak{B} folgt die gleichmäßige Konvergenz der zugehörigen Feketeschen Folgen (8) auf jedem abgeschlossenen, nur aus inneren Punkten von \mathfrak{B} bestehenden Teilbereich. Ist außerdem $\varphi(z) - \varphi_n(z) = o(1/n^k)$, so bleiben die für die Cesàroschen Folgen gültigen asymptotischen Gesetze (3), (5) und (6) auch für die allgemeineren Feketeschen Folgen erhalten. — Im fünften Kapitel zieht Verf. als Näherungsfunktionen für die durch eine Potenzreihe (1) gegebenen Funktionen

die Hölderschen Mittel positiver ganzzahliger Ordnung $(n+1) h_n^{(r)} = \sum_{v=0}^n h_v^{(r-1)}$, $h_n^{(0)} = f_n$

und $r \geq 1$ der Partialsummen $\{f_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) der Potenzreihe (1) heran. Wenn ζ eine einfache Nullstelle von $f(z)$ ist, so zeigt die zu ihr gehörige Nullstelle ζ_n von $h_n^{(r)}$ ($r \geq 2$) folgendes asymptotische Verhalten: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(r-1)! n}{(\log n)^{r-1}} \left(\frac{\zeta_n}{\zeta} - 1 \right) = 1$. Ist dagegen ζ eine Nullstelle von $f(z)$ mit der Vielfachheit $k \geq 2$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(r-2)! n}{(k-2)! (\log n)^{r-2}} \right\}^{1/k} \left(\frac{\zeta_{ni}}{\zeta} - 1 \right) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

wobei α_i eine der Nullstellen von $z^k \varphi(\zeta) + (-1)^k \frac{\varphi^{(k-1)}(\zeta)}{\zeta^{k-1}}$ (8) mit $\varphi_{(0)}(z) = f(z)/(z - \zeta)^k$ und

$\varphi_{(s)}(z) = \int_0^z \varphi_{(s-1)}(t) dt$, $s \geq 1$ ist. In dem Binom (8) ist $\varphi(\zeta) \neq 0$ und seine k Wurzeln α_i sind die Ecken eines regulären Polygons, sobald $\varphi_{(k-1)}(\zeta) \neq 0$. In diesem Falle können die Nullstellen nach wachsendem Argument angeordnet werden. Die Nullstellen ζ_{ni} , $1 \leq i \leq k$, des Hölderschen Mittels $h_n^{(r)}(z)$ sind auch in der Reihenfolge wachsenden $\arg \frac{\zeta_{ni} - \zeta}{\zeta}$ anzuschreiben.

Über den Grad der Approximation von $f(z)$ durch die Hölderschen Mittel $h_n^{(r)}(z)$ an einer beliebigen inneren Stelle $\tilde{\zeta}$ des Konvergenzkreises von (1) beweist Verf., daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[h_n^{(r)}(\tilde{\zeta}) - f(\tilde{\zeta}) \right] \frac{n}{(\log n)^{r-1}} = - \frac{\tilde{\zeta}}{(r-1)!} f'(\tilde{\zeta}), \quad r \geq 2,$$

gilt, wenn $f(z) - f(\tilde{\zeta})$ an der Stelle $z = \tilde{\zeta}$ eine einfache Nullstelle besitzt. Ist dagegen $z = \tilde{\zeta}$ eine Nullstelle von der Vielfachheit $k \geq 2$, so hat man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[h_n^{(r)}(\tilde{\zeta}) - f(\tilde{\zeta}) \right] \frac{n}{(\log n)^{r-2}} = (-1)^k \tilde{\zeta} \frac{(k-2)!}{(r-2)!} \varphi_{(k-1)}(\tilde{\zeta}), \quad r \geq 2.$$

— Im sechsten Kapitel behandelt Verf. das asymptotische Verhalten der Nullstellen maximal konvergenter Polynomfolgen $\{f_n(z)\}$ ($n = 1, 2, \dots$). $f(z)$ sei eindeutig und regulär auf der abgeschlossenen und beschränkten Punktmenge C , deren Komplementärmenge K zusammenhängend ist. Außerdem soll für K eine Greensche Funktion $G(x, y)$ existieren. Ist $H(x, y)$ die zu $G(x, y)$ konjugierte Funktion, so bildet $w = \varphi(z) = e^{G+iH}$ die Komplementärmenge K

so auf $|w| > 1$ ab, daß sich die unendlich fernen Punkte der z - und w -Ebene entsprechen. C_R sei die Kurve in der z -Ebene, deren Gleichung $|\varphi(z)| = R > 1$ lautet. Da $f(z)$ auf der abgeschlossenen Punktmenge C regulär sein soll, gibt es zu $f(z)$ eine Zahl $\varrho > 1$ mit der Eigenschaft, daß $f(z)$ an jeder Stelle aus dem Innern von C_ϱ regulär ist. Eine Polynomfolge $\{f_n(z)\}$ ($n = 1, 2, \dots$), wobei $f_n(z)$ den Grad n haben soll, heißt auf C gegen $f(z)$ maximal konvergent im Sinne von Walsh, wenn zu jedem R , $1 < R < \varrho$, eine nur von R , nicht aber von n und z abhängige Zahl M existiert, so daß $|f(z) - f_n(z)| \leq M/R^n$, $z \in C$, gilt. Verf. beweist nun folgendes Lemma: Hat $f(z)$ eine k -fache Nullstelle ζ im Innern von C_ϱ , welche aber nicht zu C gehört, und ist ζ_{nj} eine der k Nullstellen des Polynoms $f_n(z)$, welche nach ζ konvergieren, so wird

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\zeta_{nj} - \zeta|^{1/n} = |\varphi(\zeta)/\varrho|^{1/k}, 1 \leq j \leq k.$$

Wegen der Anwendungen, welche Verf. von diesem Lemma macht, muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. — Im siebenten und letzten Kapitel stellt sich Verf. folgendes zu der bisher behandelten Fragestellung inverse Problem: $U(f)$ sei ein Operator, welcher jeder Funktion $f(z)$ einer Klasse von Funktionen, die in einem Bereiche regulär sind, eine Funktionenfolge $\{f_n(z)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) zuordnet, welche in diesem Bereiche gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Es soll nun aus dem asymptotischen Verhalten der Nullstellen von $f_n(z)$ auf die Approximationseigenschaften des Operators $U(f)$ geschlossen werden. Wegen näherer Einzelheiten sei wieder auf die Arbeit selbst verwiesen. *Lammel* (Tutzing).

Schiffer, Menahem: Faber polynomials in the theory of univalent functions. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 503—517 (1948).

Die zur Funktion (1) $f(z) = z + c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n} + \dots$ gehörigen Faberschen Polynome $F(t)$ sind definiert durch die Relationen

$$F_m(f(z)) = z^m + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} z^{-n}.$$

Es ist

$$\log \frac{f(z) - t}{z} = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} F_m(t) \cdot z^{-m}$$

eine Erzeugende der F_m . Differentiation nach t liefert entsprechende Erzeugende für die F'_m , F''_m , usw. Daraus ergeben sich für Variationen der Form

$$f^*(z) = f(z) + a \varrho^2 / (f(z) - \zeta_0) + \dots$$

Variationsformeln für die F_m , F'_m , \dots ; insbesondere ist

$$(2) \quad \delta c_{mn} = a \varrho^2 \frac{1}{n} F'_m(\zeta_0) F'_n(\zeta_0) + o(\varrho^2).$$

Verf. stellt sich nun folgendes Extremalproblem: Es sei D ein Gebiet mit $\infty \in D$, das von endlichvielen Kontinuen berandet ist, Φ die Klasse der in D univalenten Funktionen der Form (1) und $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ein Satz von N gegebenen komplexen Zahlen. Es ist der Betrag der quadratischen Form

$$Q(x, x) = \sum_{m, n=1}^N n c_{mn} x_m x_n$$

bezüglich der Klasse Φ zu maximieren und das extremale f zu bestimmen. Dieses Problem führt mittels (2) auf eine Differentialgleichung, die geschlossen integriert werden kann. Danach hat die Funktion $Q(x, x)^{-1/2} \cdot \sum_{i=1}^N x_i F_m(f(z))$ auf den Randkomponenten von D konstanten Imaginärteil. Sind nun $A_m(z)$ und $B_m(z)$ die durch m und D eindeutig bestimmten Funktionen, welche im Unendlichen Entwicklungen der Form

$$A_m(z) = z^m + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} z^{-n}, \quad B_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} z^{-n}$$

haben und auf den Randkomponenten den Bedingungen $A_m = B_m + \text{konst.}$ genügen, so folgt

$$\sum_{i=1}^N x_i F_m(f(z)) = \sum_{i=1}^N x_i A_m(z) + e^{i\delta} \sum_{i=1}^N x_i B_m(z)$$

und

$$Q(x, x) = \sum n a_{mn} x_m x_n + e^{i\delta} \sum n b_{mn} x_m x_n$$

mit $\delta = \arg Q(x, x)$. Allgemeinere Extremalprobleme lassen sich auf analoge Weise lösen und führen zu interessanten Ungleichungen für $Q(x, x)$ und die F_m [vgl. auch H. Grunsky, Math. Z. 45, 29—61 (1939); dies. Zbl. 22, 151]. A. Pfluger (Zürich).

Buck, R. Creighton: Interpolation series. Trans. Amer. math. Soc. 64, 283—298 (1948).

Es sei K die Klasse der ganzen Funktionen $f(z)$ von exponentiellem Typus. Sei ferner

$$(1) \quad T(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(w) \Phi(w) dw,$$

wo g eine ganze Funktion und Φ die Borel-Transformierte von f ist und die Kurve Γ die abgeschlossene konvexe Hülle $D(f)$ der Singularitäten von Φ umkreist. $\{T_n\}$ sei eine Folge von linearen Funktionalen von der Form (1). Gibt es eine Folge von Funktionen $\{u_n(z)\}$ derart, daß $T_n(u_m) = 0$ für $n \neq m$, $T_n(u_n) = 1$, so läßt sich jede Funktion f formal durch die Reihe (2) $\sum_0^{\infty} u_n T_n(f)$ darstellen; diese Reihe

wird eine Interpolationsreihe für $\{T_n\}$ genannt. — Verf. untersucht diejenigen Klassen von Funktionen f , für welche die Interpolationsreihe konvergent oder summierbar ist. Der hierbei angegebene Satz wird darauf auf spezielle Interpolationsreihen sowie Newtonsche, Stirlingsche, eine aus diesen verallgemeinerte, Abelsche und Lindstonesche Reihen angewandt, wobei sich schärfere Sätze ergeben, welche teils neu, teils bekannt sind. Verf. wendet die erhaltenen Resultate an, um Eindeutigkeitsklassen für gewisse Funktionale $\{T_n\}$ zu finden. U. a. erhält er, um Resultate von Gelfond [Mat. Sbornik, n. S. 4, 115—147 (1938); dies. Zbl. 20, 311].

V. Paatero (Helsinki).

Buck, R. Creighton: Integral valued entire functions. Duke Math. J. 15, 879—891 (1948).

Eine ganze Funktion $f(z)$ wird ganzwertig (integral valued) genannt, falls $f(z)$ für jedes $n = 0, 1, 2, \dots$ ganz ist. Der von diesen gebildete Ring sei R . Konjugierte algebraische Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ definieren immer einen Unterring R_1 von R , dessen jedes Glied die Form $f(z) = P_0(z) + \sum_1^r P_k(z) \gamma_k^z$ hat, wo P_0, \dots, P_r Polynome sind. Jede Funktion von R_1 ist vom exponentiellen Typus. Diese Klasse sei K . Der Zweck ist, diejenigen ganzwertigen Funktionen zu charakterisieren, welche zu einer gegebenen Unterklasse von K gehören. — Die Resultate folgen daraus, daß $f(z)$ unter gewissen Bedingungen eine Darstellung von der Form $f(z) = \sum_1^m P_k(z) (1 + \beta_k)^z$ besitzt, wo β_k konjugierte ganze algebraische Zahlen sind.

Ein analoger Satz wird für vollständig (completely) ganzwertige Funktionen $f(z)$ bewiesen, d. h. für solche, die für $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ganze Werte annehmen. Die allgemeinen Sätze werden auf spezielle Klassen von ganzen Funktionen angewandt, wobei sich u. a. mehrere bekannte Resultate ergeben. V. Paatero (Helsinki).

Shah, S. M.: The maximum term of an entire series. V. J. Indian math. Soc. n. S. 13, 60—64 (1949).

$f(z) = \sum a_n z^n$. Soient $\mu(r)$ le module du terme max. pour $|z| = r$, $\nu(r)$ le rang de ce terme, $\nu(r) = n$ pour $R_n \leq r < R_{n+1}$, enfin a et b , c et d , α et β , l et L les lim et lim de

$$u_n = n \log \frac{R_{n+1}}{R_n}, \quad \frac{\lg \mu(r)}{\nu(r)}, \quad \frac{\lg |a_{n+1}/a_n|}{\lg n}, \quad n \left[\frac{|a_n|^2}{|a_{n-1} a_{n+1}|} - 1 \right].$$

Si $l > 0$, $f(z)$ est une fonction entière. Si $f(z)$ est une fonction entière, $l \leq \alpha \leq \beta \leq L$ et $l = a \leq c \leq d \leq b \leq L$; d'où des inégalités sur l'ordre ρ et l'ordre inférieur λ de $f(z)$ déduites de $\alpha \leq 1/\rho \leq 1/\lambda \leq \beta$ et $c \leq 1/\rho \leq 1/\lambda \leq d$. Si $c = d$ et $u_n - u_{n-1} = O(1/n)$, $a = b = d$.

Dufresnoy (Bordeaux).

Krein, M.: A contribution to the theory of entire functions of exponential type. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **11**, 309—325 u. engl. Zusammenfassg. 325—326 (1947).

Verf. betrachtet die Klasse N der ganzen Funktionen $f(z)$, für die $\log^+ |f(z)|$ in der oberen als auch in der unteren Halbebene je eine harmonische Majorante besitzt. Er beweist unter anderem: 1. Es ist $f \in N$ dann und nur dann, wenn f vom Exponentialtypus und $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty$ ist. 2. Für jedes $f \in N$ existiert eine Konstante μ , so daß $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r} = \mu |\sin \varphi|$ ist. 3. Hat eine ganze

Funktion $f(z)$ nur einfache Nullstellen α_k , ist $\sum \frac{\Im \alpha_k}{|\alpha_k|^2} < \infty$ und $\frac{1}{f(z)} = \sum_1 \frac{c_k}{z - \alpha_k}$, $\left(\sum \frac{c_k}{\alpha_k} < \infty\right)$, so gehört f zur Klasse N . — Bemerkung des Ref.: Die Bedingungen unter 1. sind schon notwendig und hinreichend dafür, daß eine in $\Im z \geq 0$ stetige und in $\Im z > 0$ reguläre Funktion f für $\log^+ |f|$ eine harmonische Majorante besitzt.

A. Pfluger (Zürich).

Wilson, R.: Densities of strongest growth near an essential singularity. J. London math. Soc. **23**, 246—250 (1949).

Es sei $\Phi(z) = \psi(e^{-1/z})$ eine ganze Funktion vom Mitteltypus der Ordnung ϱ ($0 < \varrho < \infty$). Dann gibt es eine ganze Funktion $F(z)$ vom Mitteltypus der Ordnung $\varrho/(\varrho + 1)$, so daß $\psi(\zeta) = \sum_0^\infty F(n) \zeta^n$ ist. In einer früheren Arbeit (A. J. Macintyre and R. Wilson, dies. Zbl. **31**, 300) wurde gezeigt, daß die Richtungen des stärksten Anwachsens von $F(z)$ bzw. $\Phi(z)$ zueinander konjugiert, d. h. symmetrisch sind bezüglich der reellen Achse. Für den Fall, daß nur endlich viele solche Richtungen vorhanden sind, beweist Verf., daß entlang einer Richtung stärksten Anwachsens für F die Punkte, wo $|F|$ „groß“ ist, in bestimmter Weise den Punkten entlang der konjugierten Richtung entsprechen, in welchen $|\Phi|$ „groß“ ist. Zum Beweis werden die Laplacetransformation sowie Resultate von E. Lindelöf über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrag einer ganzen Funktion und den Koeffizienten ihrer Taylorentwicklung verwendet.

A. Pfluger (Zürich).

Beurling, Arne: Some theorems on boundedness of analytic functions. Duke math. J. **16**, 355—359 (1949).

En utilisant le principe des majorantes harmoniques et la formule de Poisson, l'A. montre que si $f(z)$ est holomorphe dans $|z| < R$ et satisfait à $|f(r)| M(r)^{1+\varepsilon} \leq C^{2+\varepsilon}$ pour $0 \leq r \leq R$ (C et ε étant des constantes positives), alors $|f(z)| \leq C$ dans un domaine dépendant seulement de R et de ε . La constante ε étant remplacée par une fonction $\varepsilon(r)$ décroissante et telle que $\lim \varepsilon(r) \log r > 0$, ce théorème est étendu: 1° au cas $R = \infty$; 2° au cas d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans l'angle $0 < \arg z < 2\beta$.

Dufresnoy (Bordeaux).

Combes, Jean: Sur le théorème de Landau-Carathéodory. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 41—42 (1949).

Triviale Verallgemeinerung des bekannten Landauschen Satzes über den Regularitätsradius analytischer Funktionen mit drei Ausnahmewerten auf den Fall, wo die Ausnahmemege mindestens drei Punkte enthält und sonst beliebig ist.

A. Pfluger (Zürich).

Clement, Lucette: Etude de la surface de Riemann de $f(z) = e^{hz} \frac{e^z - 1}{z}$, $h > 0$.

C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 256—257 (1948).

Après avoir décomposé le plan des z en domaines d'univalence, l'A. détermine la surface de Riemann sur laquelle la fonction inverse de $f(z)$ est uniforme.

Dufresnoy (Bordeaux).

Jabotinsky, Eri: Sur les fonctions inverses. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 508—509 (1949).

Es bilde $w = F(z)$ eine Umgebung von $z = 0$ auf eine Umgebung von $w = 0$ konform ab. $z = F_{-1}(w)$ sei die inverse Abbildung. Es werden einige Relationen zwischen den Koeffizienten der Laurententwicklungen von $(F(z))^n$, $(F_{-1}(z))^n$ und $(F(z))^n \cdot F'(z)$ (n ganze rationale Zahlen) aufgestellt.

A. Pfluger (Zürich).

Consiglio, A.: Determinazione in termini finiti di rappresentazioni conformi. Mat., Catania **3**, 50—58 (1948).

Es sei die Aufgabe gestellt, einen einfach zusammenhängenden Bereich in der z -Ebene ($z = x + iy$) in die obere imaginäre Halbebene der z_1 -Ebene konform abzubilden. Die Begrenzungskurve c des Bereiches der z -Ebene sei durch $x = \alpha(\sigma)$, $y = \beta(\sigma)$ gegeben. α und β sollen stetige erste und zweite Ableitungen haben, es sei $\alpha'^2 + \beta'^2 > 0$, $\alpha(2\pi) = \alpha(0)$, $\beta(2\pi) = \beta(0)$, im Intervall $(0, 2\pi)$ folge aber aus $\alpha(\sigma) = \alpha(\tau)$, $\beta(\sigma) = \beta(\tau)$: $\sigma = \tau$. Die Wronskideterminante $W(\sigma) = \begin{vmatrix} \alpha'(\sigma) & \beta'(\sigma) \\ \alpha''(\sigma) & \beta''(\sigma) \end{vmatrix}$ sei wenigstens für einen Wert von σ von Null verschieden. Ist das Bild von $z = z^*$ (auf c) der Punkt $z_1 = \infty$, so ist die analytische Funktion z_1 , die die Abbildung vermittelt, von der Form $z_1 = (\lambda + \mu z)/(z - z^*) + \psi(z)$ mit reellem λ , μ und einer innerhalb und auf c regulären Funktion $\psi(z)$. Verf. stellt sich die Aufgabe, λ , μ sowie $\Re[i\psi(z)]$ (\Re Realteil) auf c zu finden. Mit der Abkürzung $\gamma = \alpha'^2(\sigma^*) + \beta'^2(\sigma^*)$ findet er $\lambda = 2m\gamma\alpha'(\sigma^*)/W(\sigma^*)$, $\mu = 2m\gamma\beta'(\sigma^*)/W(\sigma^*)$. Hierbei kann m , der Imaginärteil von $\psi(\sigma^*)$, noch willkürlich angenommen werden, indem man einen (endlichen) reellen Punkt in z_1 einem Punkte von c zuordnet. Auf c wird endlich $\Re[i\psi(z)] = [\mu\delta(\sigma) - \lambda\beta(\sigma)]/[\delta^2(\sigma) + \beta^2(\sigma)]$, wo $\delta(\sigma) = \alpha(\sigma) - \alpha(\sigma^*)$ ist.

Holzer (Graz).

Béjar Alamo, Juan: Über Dirichletsche Reihen mit komplexen Exponenten. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. **7**, 70—86 (1947) [Spanisch].

Es werden das Konvergenzgebiet der Reihe $(1) f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ mit komplexen Koeffizienten a_n und komplexen Exponenten $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ und die Singularitäten der Funktion $f(s)$ untersucht. Zuerst wird folgendes Theorem bewiesen: Wenn die Folge $\{\alpha_n\}$ beständig gegen ∞ wächst bis auf endlich viele α_n , die einander gleich sein können, und die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert (absolut konvergiert), so ist die Abszisse c der Konvergenz (die Abszisse a der absoluten Konvergenz) von (1) durch

$$c = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \sum_{v=1}^n a_v \right|}{\alpha_n} \quad \text{bzw.} \quad a = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_{v=1}^n |a_v|}{\alpha_n}$$

bestimmt. Weiter wird bewiesen: Wenn die Folge $\{\lambda_n\}$ für eine unendliche Reihe von Indizes n_1, n_2, \dots die Bedingung $\alpha_{n_v+1} - \alpha_n > \vartheta \alpha_{n_v}$ mit konstantem ϑ erfüllt, konvergiert die Folge der Partialsummen $\sum_{n=1}^{n_v} a_n e^{-\lambda_n s}$ gleichmäßig in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Punktes der Konvergenzgeraden, in dem $f(s)$ holomorph ist. Schließlich folgt als Ergebnis der Untersuchung: 1. Die Differenz $c - H$ zwischen der Konvergenzabszisse c von (1) und der Abszisse H der Holomorphie von $f(s)$ kann nicht größer sein als

$$\delta = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \log \left| \frac{1}{C'(\lambda_n)} \right| \right\}, \quad \text{wo} \quad C(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right)$$

ist. 2. Wenn δ endlich ist, kann die Reihe (1) keine ganze Funktion $f(s)$ darstellen, wenn sie auch für alle s konvergiert. 3. Auf jeder Strecke der Geraden $\Re(s) = H$, deren Länge größer als

$2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} n/|\lambda_n|$ ist, existiert mindestens ein singulärer Punkt von $f(s)$. 4. Wenn δ und $\lim_{n \rightarrow \infty} n/|\lambda_n|$ null sind, ist die Konvergenzgerade von (1) die natürliche Grenze der Funktion $f(s)$, die sie darstellt. E. Göllnitz (Chemnitz).

Bohr, Harald: On the convergence problem for Dirichlet series. Danske Vid. Selsk., mat.-fysiske Medd. 25, Nr. 6, 18 S. (1949).

Das Landau-Schneese Theorem für gewöhnliche Dirichletsche Reihen besagt folgendes: Sind η (< 1) und k (≥ 0) zwei Konstante und $a_n = O(n^\delta)$ für jedes $\delta > 0$ derart, daß die Funktion $f(s) = \sum_1^\infty a_n n^{-s}$ für $\sigma > \eta$ regulär und $f(s) = O(|t|^{k+\varepsilon})$

ist für $\sigma > \eta + \varepsilon$, so ist die Konvergenzabszisse der Reihe $\leq \text{Min}(\frac{\eta+k}{1+k}, \eta+k)$. Verf. zeigt, daß die angegebene Schranke exakt ist, d. h. zu jedem Paar (η, k) mit $\eta < 1$ und $k \geq 0$ gibt es eine Dirichletsche Reihe mit $a_n = O(n^\delta)$, $\delta > 0$, so daß ihre Konvergenzabszisse gleich der obigen Schranke ist. Pfluger.

Chia-Yung, Yu: Quelques théorèmes dans la théorie des séries de Dirichlet. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 641—643 (1949).

Die Dirichletsche Reihe $\sum_1^\infty c_n e^{-\lambda_n z}$ stelle eine ganze Funktion $\Phi(z)$ dar. Basierend auf dem Rittschen Begriff des linearen Ordnungstypus gibt Verf. Beziehungen an zwischen den Koeffizienten und Exponenten der Reihe einerseits und dem Typus σ der linearen Ordnung τ andererseits. Es ergeben sich notwendige und hinreichende Bedingungen, ausgedrückt durch die c_n und λ_n , dafür, daß das lineare Wachstum von Φ regulär bzw. vollkommen regulär sei. Einer Methode von G. Valiron folgend [Proc. nat. Acad. Sci. USA 20, 211—215 (1934); dies. Zbl. 9, 25] ergeben sich zwischen den Singularitäten einer Dirichletschen Reihe mit endlicher Konvergenzabszisse und den Borelschen Richtungen $y = y_0$ einer zugeordneten ganzen Funktion $\Phi(z)$ gewisse Beziehungen. A. Pfluger (Zürich).

Brunk, H. D.: A consistency theorem. Bull. Amer. math. Soc. 55, 204—212 (1949).

Sei Δ ein Gebiet in der s -Ebene ($s = \sigma + i t$), das Punkte mit beliebig großem Realteil enthält. Ist für genügend große x

$$\inf_{m \geq n} \sup_{\substack{s \in \Delta \\ \sigma > x}} \left| F(s) - \sum_1^m a_n e^{-\lambda_n s} \right| \leq e^{-p_n(x)},$$

so sagt man, die Summen $\sum_1^m a_n e^{-\lambda_n s}$ stellen in Δ die Funktion $F(s)$ mit der logarithmischen Genauigkeit $p_n(x)$ dar. Verf. gibt Bedingungen an, unter welchen die Partialsummen einer Dirichletschen Reihe von der obigen Beschaffenheit für genügend große σ gegen die Grenzfunktion $F(s)$ konvergieren. Die Methoden basieren auf Untersuchungen von S. Mandelbrojt [Ann. sci. École norm. sup., III. S. 43, 351—378 (1946)]. A. Pfluger (Zürich).

Emersleben, Otto: Einige Identitäten für Epsteinsche Zetafunktionen 2. Ordnung. Math. Ann., Berlin 121, 103—106 (1949).

Es wird folgendes Resultat samt Beweis mitgeteilt: Die Epsteinsche Zetafunktion $\zeta \left| \frac{0}{h_1, h_2} \right| (2)_\delta$ ist für $(h_1, h_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ bzw. gleich $-\pi \log 2$, $-\frac{\pi}{2} \log 2$, $-\frac{\pi}{4} \log 2$. A. Pfluger (Zürich).

Carrasco, Luis Esteban: Die n -te Ableitung einer polygenen Funktion. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 3—11 (1948) [Spanisch].

Die Berechnung der höheren Ableitungen $d^n w/dz^n$ von polygenen Funktionen $w = u + iv$ der komplexen Variablen z wird dadurch erschwert, daß dieselben nicht nur vom Punkte z , sondern auch von der Kurve $y = y(x)$, längs der die

Ableitung erfolgt, abhängig sind. Verf. verallgemeinert Ergebnisse von Kasner [Trans. Amer. math. Soc. 30, 803–818 (1928)], indem er folgenden Ausdruck für die n -te Ableitung erhält:

$$d^n w/dz^n = T_1(y') + T_2(y', y'') y'' + T_3(y', y'', y''') y''' + \dots \\ + T_{n-2}(y', y'', y''') y^{(n-2)} + T_{n-1}(y', y'') y^{(n-1)} + T_n(y') y^{(n)};$$

dabei sind die Funktionen T_k natürlich alle noch von z abhängig. Die Ableitungen $y', y'', \dots, y^{(s)}$, wo $s \leq n/2$ oder die nächstgrößere ganze Zahl bedeutet, treten in $d^n w/dz^n$ nichtlinear auf. Den Schluß der Arbeit bildet eine Bemerkung über die Möglichkeit einer geometrischen Interpretation der erhaltenen Ergebnisse.

Kriszten (Zürich)

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

● Sansone, Giovanni: Equazioni differenziale nel campo reale. Parte seconda. 2. ed. (Consiglio Nazionale delle Ricerche. Monografie di matematica applicata.) Bologna: N. Zanichelli 1949. XVI, 475 p.

Orts, J. M.: Differentialeigenschaften der rekurrenten Reihen. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 7, 109–116 (1947) [Spanisch].

Verf. beweist: Ist $\varrho(x)$ ein Polynom q -ten Grades, $\varrho(x) = \mu_q x^q + \dots + \mu_0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Potenzreihenentwicklung von $P(x)/\varrho(x)$, wo $P(x)$ ein beliebiges Polynom von kleinerem als q -tem Grade ist, so gilt für Koeffizienten a_n die Rekursionsformel

$$\mu_q a_r + \mu_{q-1} a_{r+1} + \dots + \mu_0 a_{q+r} = 0.$$

Selbstverständlich ist $\mu_0 \neq 0$ angenommen. Wird dagegen die Differentialgleichung $\mu_0 y^{(q)} + \dots + \mu_q y = 0$ durch Reihenentwicklung $y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n/n!$ gelöst, so erfüllen die b_r dieselbe Rekursionsformel wie die a_r . — Fast ohne Rechnung gibt folgende Überlegung das Ergebnis des Verf.: Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung mit s als unabhängiger Veränderlicher sei $s^q Q(1/s)$. Wird deren Lösungsfunktion der Laplacetransformation $L(y) = \int_0^{\infty} e^{-sx} y(x) dx$ unterzogen, so bleibt $L(y) = R(s)/[s^q Q(1/s)]$, wo $R(s)$ ein Polynom von einem Grade $< q$ ist. Umgekehrt geht eine echt gebrochene rationale Funktion $P(t)/\varrho(t)$ mit $t = 1/s$ in $s R(s)/[s^q Q(1/s)]$ über, wo $R(s)$ ein Polynom von einem Grade $< q$ ist. Dies ist also bis auf den Faktor s die Laplacetransformierte einer Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung. Ist $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n/n!$, so ist die Transformierte $L(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n/s^{n+1}$ und $P(t)/\varrho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, w. z. b. w.

Holzer (Graz).

Germy, R.-H.-J.: Remarque sur une méthode d'approximations successives pour l'intégration des systèmes linéaires d'équations différentielles: extension à des systèmes de forme générale. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 119–125 (1947).

Il metodo classico delle approssimazioni successive per un sistema differenziale normale

$$y'_k = f_k(x, y_1, y_2, y_3) \quad (k = 1, 2, 3)$$

con date condizioni iniziali si può, sotto le consuete ipotesi, modificare, passando dalla m -esima approssimazione $y_{1,m}, y_{2,m}, y_{3,m}$ alla $(m+1)$ -esima $y_{1,m+1}, y_{2,m+1}, y_{3,m+1}$, con formule ricorrenti, in cui ogni volta la $y_{1,m+1}$ è definita mediante le $y_{1,m}, y_{2,m}, y_{3,m}$, la $y_{2,m+1}$ mediante le $y_{1,m+1}, y_{2,m}, y_{3,m}$, la $y_{3,m+1}$ mediante le $y_{1,m+1}, y_{2,m+1}, y_{3,m}$.

G. Cimmino (Bologna).

Germa, R.-H.-J.: Sur l'intégration par approximations successives de systèmes normaux d'équations différentielles dont les seconds nombres sont donnés comme limites de suites uniformément convergentes. *Bull. Soc. Sci. Liège* **16**, 247—254 (1947).

Il metodo delle approssimazioni successive modificato alla maniera indicata nel lavoro precedente viene applicato al caso, in cui le f_k siano limiti di successioni uniformemente convergenti $f_{k,1}, f_{k,2}, \dots$ di funzioni ugualmente limitate ed ugualmente lipschitziane rispetto alle y_1, y_2, y_3 , laddove nella definizione della m -esima approssimazione si sostituiscono le $f_{1,m}, f_{2,m}, f_{3,m}$ alle f_1, f_2, f_3 . *G. Cimmino (Bologna)*.

Franckx, E.: La méthode des approximations successives et les systèmes différentiels normaux à une infinité d'inconnues. *Bull. Soc. Sci. Liège* **17**, 308—312 (1948).

Esistenza e unicità (in piccolo) di una successione di funzioni $y_1(x), y_2(x), \dots$, soluzioni del sistema di infinite equazioni differenziali

$$y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

con date condizioni iniziali, vengono stabilite col metodo delle approssimazioni successive, sotto ipotesi, che consentono di estendere senza difficoltà il consueto corrispondente procedimento relativo al caso di n equazioni con n funzioni incognite. *G. Cimmino (Bologna)*.

Gradštejn, I. S.: Über eine Klasse nichtlinearer Differentialgleichungen mit kleinen Faktoren bei gewissen Ableitungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **64**, 441—443 (1949) [Russisch].

Im Anschluß an frühere Arbeiten des Verf. [*Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **53**, 391—394 (1946); *Izvestija Akad. Nauk SSSR*, Ser. tech. **11**, Nr. 5 (1947) und dies. *Zbl.* **32**, 162] sowie Arbeiten von Tichonov [*Mat. Sbornik*, n. S. **22**, 193—204 (1948)] und Birkhoff, Friedrichs and Watson, Yü-Why Tschien, wird das Anfangswertproblem eines Systems von $\mu + m$ (nichtlinearen) Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\eta \frac{dX_i}{dt} = F_i(X, b, \eta) \quad (i = 1, 2, \dots, \mu), \quad \frac{dX_i}{dt} = F_i(X, b, \eta) \quad (i = \mu + 1, \mu + 2, \dots, \mu + m)$$

behandelt (\bar{X} bezeichnet $X_1, \dots, X_{\mu+m}$), wo $0 < \eta \leq \eta_0$ und

$$F_i(\bar{X}, t, \eta) = F_i(\bar{X}, t) + \eta r_i(\bar{X}, t, \eta) \quad \text{sowie}$$

$$X_i(t_0, \eta) = x_i^{(0)}(t_0) + a_i + O(\eta) \quad (i = 1, \dots, \mu),$$

$$X_i(t_0, \eta) = x_i^{(0)}(t_0) + O(\eta) \quad (i = \mu + 1, \dots, \mu + m).$$

Es werden die Bedingungen dafür angegeben, daß $\lim_{\eta \rightarrow +0} X_i(t, \eta) = x_i^{(0)}(t)$, wo $x_i^{(0)}(t)$ die Integralkurve des Anfangswertproblems kennzeichnet, das sich aus dem gegebenen für $\eta \rightarrow +0$ ergibt. *Reutter (Karlsruhe)*.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

• **Schouten, J. A. and W. v. d. Kulk:** Pfaff's problem and its generalizations. Oxford: At the Clarendon Press 1949. XI, 542 p. 50 s. net.

Nachdem in zwei einleitenden Kapiteln die algebraischen, geometrischen und analytischen Voraussetzungen der Theorie der Differentialgleichungen auseinandergesetzt worden sind, behandelt das Buch zunächst die klassischen Theorien. Das Integrationsproblem wird eingeteilt in ein äußeres und ein inneres Problem, je nachdem, ob zu einem gegebenen Feld p -dimensionaler Richtungen einhüllende oder eingehüllte Mannigfaltigkeiten gesucht werden. Als äußeres Problem werden die verschiedenen Formulierungen und Integrationsverfahren der linearen partiellen Differentialgleichungen mit einer Unbekannten behandelt. Die Klassifikation der Pfaffschen Formen wird auf die fünf ihnen invariant zugeordneten vollständig integrierbaren Systeme gegründet. Während hier die Bestimmung kanonischer Darstellungen gelingt, liefern im Falle der kovarianten q -Vektorfelder (alternierende Differentialformen q -ten Grades) die fünf zugeordneten Pfaffschen Systeme nur eine gröbere Klassifikation, die aber im Falle der q -fachen Produkte

Pfaffscher Formen („einfache“ q -Vektorfelder) durch Verwendung eines 6., von Grynæus stammenden Systems verfeinert wird. Aus der Forderung, alle kanonischen Darstellungen einer Pfaffschen Form zu gewinnen, wird die Theorie der Berührungstransformationen und in Zusammenhang damit die Lösung des inneren Problems einer Pfaffschen Gleichung entwickelt. Die Poissonschen und Lagrangeschen Klammern, deren gleichzeitige Einführung sich als zweckmäßig erweist, leiten über zur Theorie der Funktionsgruppen, deren kanonische Formen aufgestellt werden. Die allgemeine Liesche Auffassung der Integration partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung erfährt eine Vertiefung durch eine Klassifikation der Vektormannigfaltigkeiten \mathfrak{R}_m , wobei die als Klasse von \mathfrak{R}_m bezeichnete Invariante K eine besondere Rolle spielt. Auch das Integrationsproblem wird mit Hilfe dieses Klassenbegriffs verfeinert, und es wird als Haupttheorem eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür angegeben, daß eine gegebene \mathfrak{R}_m der Klasse K durch Integral- \mathfrak{R}_m der Klasse K' vollständig integriert werden kann. Diese Theorie enthält die 2. Methode von Jacobi und die auf Funktionsgruppen gegründete Liesche Integrationsmethode für Systeme partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung. Sie gestattet auch eine vollständige Klassifikation der einfachen q -Vektorfelder, was wichtige Anwendungen auf Pfaffsche Systeme zuläßt. Als inneres Problem wird sodann die Cartansche Theorie der Pfaffschen Systeme und ihre von Goursat u. a. gegebene Verallgemeinerung ausführlich entwickelt. Eine weitere Vertiefung erfährt diese Theorie in einem Kapitel über die d -dimensionalen Felder m -dimensionaler Richtungen, indem statt der im Goursatschen Problem linearen Gleichungen beliebige homogene Gleichungen für die Graßmannschen Richtungskordinaten zugelassen werden. Für die vollständige Integrierbarkeit solcher Systeme werden notwendige Bedingungen und in Sonderfällen hinreichende Bedingungen angegeben. Im Falle vollständiger Integrierbarkeit werden die Integralmannigfaltigkeiten durch Anfangsbedingungen festgelegt. Das letzte Kapitel wendet die Cartansche Theorie auf beliebige Systeme partieller Differentialgleichungen an und entwickelt das Verfahren der Verlängerung eines Pfaffschen Systems. Dabei wird auf Ausnahmefälle hingewiesen, in denen der Cartansche Endlichkeitsbeweis des Verlängerungsverfahrens versagt. Die Theorie von Riquier wird erläutert. — Das reichhaltige und gut ausgestattete Werk gibt an zahlreichen Beispielen Gelegenheit zur Einübung der in strenger, abstrakter Sprache dargestellten Theorie. Kähler (Leipzig).

Pini, Bruno: Sui sistemi di infinite equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali. Giorn. mat. Battaglini, IV. S. 78, 151—167 (1949).

Es bezeichnen A_1, \dots, A_n die Koeffizientenmatrizen von n beschränkten Lineartransformationen im Hilbertschen Raum und y einen H -Vektor (Vektor des Hilbertschen Raums); die Elemente der A_k und die Komponenten von y seien Funktionen des Punktes $P = (x_1, \dots, x_n)$ mit einem gemeinsamen Definitionsgebiet I . Die im Titel genannten Systeme werden symbolisch

$$dy = \sum_{k=1}^n A_k(P) y dx_k$$

geschrieben. Verf. legt in passender Weise sehr weite Voraussetzungen für die gegebenen unendlichen Matrizen A_k und den gesuchten H -Vektor y (Integral des Systems) fest, um eine Theorie entwickeln zu können, welche eine vollständige Analogie mit dem Falle von quadratischen endlichen Matrizen und Vektoren des üblichen mehrdimensionalen Raumes aufweist. Er beweist u. a. die Existenz einer Grundfolge von Integralen, deren Linearkombinationen mit konstanten, einen willkürlichen H -Vektor darstellenden Koeffizienten die Gesamtheit der Integrale des Systems liefern. Sind insbesondere die Koeffizienten des Systems konstant und die Matrizen A_k symmetrisch und totalstetig, so zeigt Verf., wie man explizite Auflösungsformeln gewinnen kann: seine Behandlung im Sonderfalle endlicher Systeme liefert eine Vereinfachung und Vervollständigung der vor kurzem von Saltykow erhaltenen Ergebnisse (dies. Zbl. 29, 128). Unter den letztgenannten Voraussetzungen für die Matrizen A_k wird endlich die Lagrangesche Methode der Variation der Konstanten für das System $dy = \sum_{k=1}^n (A_k y + b_k) dx_k$ (b_1, \dots, b_n H -Vektoren, die als Funktionen von P gegeben sind) entwickelt. G. Cimmimo (Bologna).

Charles, Henri: Sur les systèmes de Pfaff linéaires homogènes à coefficients constants. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 66—69 (1947).

Durch Anwendung der Laplaceschen Transformation gibt Verf. die Form der

Integrale für ein vollständig integrierbares System des Typus

$dv = (a_1 v + a_2 w) dx + (b_1 v + b_2 w) dy, \quad dw = (c_1 v + c_2 w) dx + (d_1 v + d_2 w) dy$
 ($a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ Konstanten); es wird jedoch nicht bemerkt, daß einige Koeffizienten der gefundenen Formeln notwendig gleich Null sein werden, außerdem wird nicht gezeigt, in welcher Weise die Integrale von den Integrationskonstanten abhängen.

G. Cimmino (Bologna).

Charles, Henri: Sur l'intégrabilité des systèmes de Pfaff linéaires homogènes à coefficients constants. *Bull. Soc. Sci. Liège* **17**, 155—157 (1948).

Untersuchung des Falls, daß die Integrabilitätsbedingungen für das im vorsteh. Referat genannte System nicht erfüllt sind.

G. Cimmino (Bologna).

Germa, R.-H.-J.: Extension d'un théorème de Lagrange aux systèmes complètement intégrables d'équations aux différentielles totales de forme linéaire et homogène. *Bull. Soc. Sci. Liège* **16**, 17—23 (1947).

Viene dimostrato che, noti $k < p$ integrali linearmente indipendenti per un sistema del tipo indicato nel titolo di p equazioni in p funzioni incognite, l'integrazione di questo si potrà ricondurre a quadrature e all'integrazione di un sistema dello stesso tipo di $p - k$ equazioni in $p - k$ funzioni incognite, in particolare, se $k = p - 1$, si potrà ricondurre a sole quadrature.

G. Cimmino (Bologna).

Germa, R.-H.-J.: Sur les systèmes complètement intégrables d'équations aux différentielles totales. *Bull. Soc. Sci. Liège* **17**, 200—208 (1948).

Il metodo delle approssimazioni successive per un sistema completamente integrabile di equazioni ai differenziali totali

$$dz_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p) dx_k, \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

con la condizione iniziale che le incognite funzioni z_1, \dots, z_p delle variabili x_1, \dots, x_n si annullino per $x_1 = \dots = x_n = 0$ viene modificato in maniera simile a quella considerata nei due lavori precedenti (questo *Zbl.* **33**, 368/9). *G. Cimmino (Bologna).*

Germa, R.-H.-J.: Sur une modalité de la méthode d'intégration par approximations successives des équations aux dérivées partielles du premier ordre. *Ann. Soc. sci. Bruxelles, Sér. I* **63**, 31—35 (1949).

Il metodo delle approssimazioni successive modificato alla maniera considerata nei tre precedenti lavori (vedi la recensione precedente e questo *Zbl.* **33**, 368/9) viene applicato al sistema differenziale caratteristico associato all'equazione a derivate parziali del primo ordine

$$p_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, \dots, p_n)$$

e al sistema di equazioni, che definiscono implicitamente la soluzione del relativo problema di Cauchy e le sue derivate parziali.

G. Cimmino (Bologna).

Dehousse, L.: Remarques sur les approximations successives relatives à un système linéaire d'équations différentielles. *Bull. Soc. Sci. Liège* **16**, 162—173 (1947).

Si confronta il metodo classico delle approssimazioni successive con quelli modificati, che in vari problemi hanno recentemente studiati Céressia e Germa (v. le due recensioni precedenti e questo *Zbl.* **33**, 368/9), nel caso di un sistema normale di equazioni differenziali lineari con prescritte condizioni iniziali, al fine di provare che, almeno quando i coefficienti e i termini noti del sistema sono sempre non negativi e non identicamente nulli, le approssimazioni dei metodi modificati convergono più rapidamente di quelle abituali. Viene anche confrontata la rapidità di convergenza di serie maggioranti relative ai diversi metodi modificati.

G. Cimmino (Bologna).

Germa, R.-H.-J.: Sur certains systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles du second ordre. *Ann. Soc. sci. Bruxelles, Sér. I* **63**, 73—76 (1949).

Die hier behandelten Systeme lassen sich mittels der (vom Verf. nicht verwendeten) üblichen Schreibweise des Matrizenkalküls kurz,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y) z + f(x, y)$$

(a, b, c quadratische Matrizen n -ter Ordnung, z, f n -dimensionale Vektoren) schreiben. Die alte wohlbekannte Theorie, die dem Fall $n = 1$ entspricht, nach welcher die auf den Geraden $x = 0, y = 0$ verschwindende Lösung $z(x, y)$ in der Form

$z(x, y) = \int_0^x \int_0^y G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$ ausgedrückt werden kann, läßt sich auf den Fall $n > 1$ unmittelbar ausdehnen; G bedeutet dabei eine quadratische Matrix n -ter Ordnung, für welche

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial G}{\partial x} + b \frac{\partial G}{\partial y} + c G, \quad \left[\frac{\partial G}{\partial x} \right]_{\eta=y} = b[G]_{\eta=y}, \quad \left[\frac{\partial G}{\partial y} \right]_{\xi=x} = a[G]_{\xi=x}$$

ist. Daraus ergibt sich, daß die Matrizen a, b, c durch G und ihre Ableitungen ausdrückbar sind. Die Determinanten der Matrizen $G(x, y, x, \eta)$ und $G(x, y, \xi, y)$ drücken sich aus durch die Spuren $a(x, y), b(x, y)$ der Matrizen $a(x, y), b(x, y)$

bzw. als $\exp \int_{\eta}^y \bar{a}(x, v) dv$ und $\exp \int_{\xi}^x b(u, y) du$. G. Cimmino (Bologna).

Pescarini, Angelo: Su alcuni sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 63—67 (1949).

Ref. untersuchte Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk} \frac{\partial X^{(j)}}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wobei die $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ unbekannte Funktionen der Veränderlichen x_1, \dots, x_m bezeichnen, für den Fall, daß lauter Systeme harmonischer Funktionen als Lösungen vorkommen können (dies. Zbl. 26, 406); Verf. gibt hier eine kennzeichnende Bedingung von algebraischem Typus für die Koeffizienten, damit das System von der genannten Beschaffenheit sei. G. Cimmino (Bologna).

Galenen, L. M.: Sur l'intégration formelle de quelques équations au dérivées partielles du second ordre. C. r. Acad. Sci. URSS, II. S. 55, 283—286 (1947).

L'A. accenna ad alcuni procedimenti, che possono condurre in taluni casi alla integrazione formale (espressione di tutti gli integrali a mezzo di funzioni arbitrarie) di una equazione alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ di tipo generale. Uno di tali procedimenti consiste, per esempio, nell'assumere p e q come incognite funzioni di z , un altro in una estensione del metodo di Lagrange della variazione delle costanti arbitrarie, un altro nell'applicazione di certe trasformazioni puntuali. Vengono dati numerosi esempi di particolari classi di equazioni del tipo indicato, cui possono applicarsi con successo i detti procedimenti. G. Cimmino (Bologna).

Evans, Griffith C.: Kellog's uniqueness theorem and applications. Studies Essays, pres. to R. Courant, 95—104 (1948).

Sommerfeld hat zur Untersuchung der mehrdeutigen Potentialfunktionen die mehrblättrigen Räume eingeführt, auf die hier die Kellog'schen Eindeutigkeitssätze (mit Hilfe der Kapazität) und einige Integralsätze übertragen werden. Hornich.

Fichera, Gaetano: Sulla risoluzione di un particolare sistema di due equazioni vettoriali. Mat., Catania 3, 10—15 (1948).

Soit D un domaine régulier borné dans l'espace à 3 dimensions, CD son complémentaire et FD sa frontière. Soient α un champ de vecteurs et g une fonction

scalaire définis dans D et liés par la condition $\operatorname{div} \alpha = \Delta g$. La solution générale du système $\Delta \omega = \alpha$, $\operatorname{div} \omega = g$ est donnée par la formule

$$\begin{aligned} \omega(P) = & \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \left\{ \int_D \operatorname{grad} u(Q) \frac{1}{PQ} dQ + \int_{\Sigma-D} \operatorname{grad} u^*(Q) \frac{1}{PQ} dQ \right\} \\ & + \operatorname{grad} v(P) - \frac{1}{4\pi} \int_D (\alpha(Q) - \operatorname{grad} g(Q)) \frac{1}{PQ} dQ \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma-D} \operatorname{grad} h(Q) \frac{1}{PQ} dQ - \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int_D g(Q) \frac{1}{PQ} dQ, \end{aligned}$$

où Σ est une sphère contenant D , h est la fonction harmonique dans CD , zéro à l'infini et telle qu'en désignant par ν la normale de FD on ait $(\operatorname{grad} h, \nu) = (x - \operatorname{grad} g, \nu)$ sur FD , u et v sont des fonctions harmoniques arbitraires dans D et u^* est la fonction harmonique dans CD , nulle à l'infini et vérifiant $(\operatorname{grad} u^*, \nu) = (\operatorname{grad} u, \nu)$ sur FD . Horváth (Paris).

Lelong-Ferrand, Jacqueline: Étude au voisinage de la frontière des fonctions subharmoniques positives dans un demi-espace. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 66, 125—159 (1949).

Pour étudier u surharmonique > 0 dans le domaine D ($x > 0$) de l'espace R^p à $p \geq 2$ dimensions, l'A. part de la décomposition de F. Riesz dont la partie harmonique se représente par une intégrale analogue à celle de Poisson-Stieltjes pour le domaine sphérique. Les instruments sont tirés de la théorie moderne du potentiel, spécialement selon H. Cartan [Ann. Univ. Grenoble 22, 225 (1946)] avec adaptation au potentiel G ou potentiel de Green de D . Considérons dans D un ensemble E situé dans la demi-boule S_R centrée à l'origine O ($OM < R$, $x > 0$). La fonction x dans S_R prolongée par $x R^p / \overline{OM}^p$ est une fonction surharmonique V dans D , égale à un potentiel $-G$ dans D . Une opération de balayage ou extrémisation fournit le plus petit potentiel $-G$ majorant V quasi-partout sur E . La distribution de masses, l'énergie et la masse totale correspondantes seront appelées distribution fondamentale, puissance extérieure et charge extérieure relativement à E . Si on considère les intersphères $I_n (s^{n+1} < OM \leq s^n)$ ($0 < s < 1$), soient γ_n et λ_n les puissance extérieure et charge extérieure de $E \cap I_n$; E sera dit effilé en O relativement à D si la série γ_n / s^{np} converge, semi-effilé si $\gamma_n / s^{np} \rightarrow 0$, raréfié si $\lambda_n / s^{n(p-1)} \rightarrow 0$. Notions analogues pour le point à l'infini et comparaison avec l'effilement ordinaire. Pour O par exemple, un critère équivalent de cet effilement nouveau (L) est l'existence d'une fonction v , potentiel $-G$ de masses ≥ 0 , tel que v/x admette quand $M \rightarrow O$ une lim. inf finie et quand $M \rightarrow O$ sur E quasi-partout, une lim. inf distincte; si u surharmonique > 0 est telle que $\liminf_{M \rightarrow O} u/x = \gamma$ fini,

l'ensemble où $u/x > \gamma + \varepsilon$ est effilé (L) en O . Cette même étude à l'infini permet de retrouver et d'améliorer un théorème de Heins [Trans. Amer. math. Soc. 60, 238 (1946)]. Enfin à côté de u/x , u est aussi étudié à la frontière à l'aide de notions auxiliaires. Ainsi l'ensemble où un potentiel $-G$ est $\geq \varepsilon > 0$ est raréfié presque partout sur le plan-frontière π ; pour toute fonction harmonique $H > 0$ dans D , il y a presque partout sur π une limite angulaire finie et si celle-ci vaut γ au point A , l'ensemble où $|H - \gamma| > \varepsilon$ est raréfié en A . Le mémoire se termine en caractérisant comme raréfiés presque partout sur π les ensembles pour lesquels existe une distribution capacitaire (capacité relative au potentiel $-G$). Tout ce travail est le développement de 3 notes aux C. r. Acad. Sci., Paris 226 (1948) analysées dans ce Zbl. 30, 359—360. Brelot (Grenoble).

Brelot, Mareel: Quelques applications de la topologie de R.-S. Martin dans la théorie des fonctions harmoniques. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 49—51 (1948).

Riattaccandosi a risultati di R. S. Martin (questo Zbl. 25, 333), l'A. dà una formulazione più generale del cosiddetto principio delle singolarità positive di Bouli-

gand per le funzioni armoniche in un campo Ω , stabilisce una nozione di pendenza (che generalizza quella di derivata normale) per una funzione armonica, in un punto della pseudo-frontiera di Ω nel senso di R. S. Martin ed enuncia un teorema di unicità e di esistenza per un problema di Cauchy generalizzato relativo all'equazione $\Delta u = 0$. G. Cimmino (Bologna).

Mindlin, Ja. A.: Allgemeine Darstellung der Lösung der Wellengleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 58, 17—20 (1947) [Russisch].

In die für $n + 2$ Dimensionen aufgeschriebene Wellengleichung $\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ werden sphärische Koordinaten $\theta_1, \dots, \theta_n, \varphi; r, t$ eingeführt; in Form einer Entwicklung nach hypersphärischen Funktionen $Y_s(\theta_1, \dots, \theta_n, \varphi)$ wird eine Lösung angegeben, die die Gesamtheit aller einlaufenden und auslaufenden Wellen enthält. Die Koeffizienten dieser Entwicklung sind ihrerseits Lösungen einer abseparierten Differentialgleichung in r und t . Müller (Mainz).

Carrier, G. F. and F. E. Ehlers: On some singular solutions of the Tricomi equation. Quart. appl. Math. 6, 331—334 (1948).

Verff. betrachten das Gleichungssystem $\varphi_x = \varphi_y; \psi_x = -\varphi_y/y$, aus dem die Tricomische Gleichung $\varphi_{yy} + y\varphi_{xx} = 0$ und die Gleichung $\varphi_{xx} + (\varphi_y/y)_y = 0$ folgen. Die untersuchten Lösungen genügen folgenden, singulären Randbedingungen: $\varphi_x \sim 1/y$ auf $x = 0, y \rightarrow 0$; $\varphi_y \equiv 0$ auf $y = 0, x \neq 0$; ψ, φ regulär für $y > 0$ und auf $x = 0, y \neq 0$. Die Konstruktion der Lösungen ist rein formal und stützt sich auf die Methode der Fouriertransformation. Kriszten (Zürich).

Nordon, Jean: Une solution nouvelle de l'équation de la chaleur à $n + 1$ variables. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 459—460 (1949).

L'A. ricerca le soluzioni dell'equazione del calore in uno spazio riemanniano a n variabili x_1, x_2, \dots, x_n : $\Delta_2 u = \partial u / \partial t$ (in cui u è l'incognita, t il tempo, Δ_2 l'operatore di Laplace) che si possono porre nella forma $u = \varphi(t)f(z), z = \varrho(x_1, x_2, \dots, x_n)/\psi(t)$ e determina le condizioni affinché il metodo riesca. In particolare ciò si verifica se lo spazio è euclideo e se si pone, indicando r la distanza geodetica: $4\varrho = r^2, \psi = t, \varphi = t^{k-n/4}$, la $f(z)$ si può allora esprimere mediante le funzioni di Whittaker.

Graffi (Bologna).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Ingram, W. K.: Note on the integral equation of the electrical transmission line. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. S. 38, 61—64 (1947).

Unter einer Greenschen Matrix $G(x, \xi)$ wird eine zweireihige Matrix verstanden, die folgenden drei Bedingungen genügt [wegen der Bezeichnungen vgl. man von demselben Verf.: On the integral equations of continuous dynamical systems, Philos. Mag. J. Sci., London, VII. S. 30, 16—38 (1940) und die gleichbetitelte Arbeit in Proc. nat. Acad. Sci. USA 30, 370—376 (1944)]: 1. $G(x, x - 0) - G(x, x + 0) = \text{Einheitsmatrix}$, 2. $dG(x, \xi)/dx = A(x)G(x, \xi)$ ($x \neq \xi$), 3. $\omega_a G(a, \xi) + \omega_b G(b, \xi) = 0$. Die Greensche Matrix ist durch gewisse Lösungen $v_a(x), i_a(x)$ bzw. $v_b(x), i_b(x)$ der Differentialgleichungen des Problems darstellbar und eindeutig bestimmt. — Die Integralgleichung für die erzwungenen Schwingungen ist von der Form

$$E \cdot U(x) = \mu \int_a^b G(x, \xi) A(\xi) E \cdot U(\xi) d\xi,$$

wobei

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & c(x) \\ l(x) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E = \begin{pmatrix} e^{-i\beta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_2} \end{pmatrix}$$

bekannt und $U(x) = \begin{pmatrix} V(x) \\ I(x) \end{pmatrix}$ der unbekannte Vektor ist, für den eine Näherungslösung angegeben wird. Exakte Lösungen in Spezialfällen werden mitgeteilt.

Schmeidler (Berlin).

Zahorski, Z.: Sur les ensembles des points de divergence de certaines intégrales singulières. *Ann. Soc. Polonaise Math.* **19**, 66—105 (1947).

L'A. considère des intégrales singulières de la forme

$$g(s, x) = \int_a^b f(x+t) K(s, t) dt \quad (-\infty < a < 0 < b < \infty)$$

où l'on suppose que l'intégrale existe pour tout x réel et pour $s \in S$, S étant un ensemble de nombres positifs non borné supérieurement. $K(s, t) = 0$ pour $t \notin (a, b)$. Soit $g(x) = \lim g(s, x)$ ($s \in S$, $s \rightarrow \infty$). Dans les énoncés le noyau $K(s, t)$ est assujéti

à certaines des conditions suivantes: I. $\int_a^b K(s, t) dt = 1$; II. $K(s, t) \geq 0$;

III. $\int_a^b |K(s, t)| dt < C$; IV. $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_a^{-\delta} + \int_{\delta}^b |K(s, t)| dt = 0$, $\delta > 0$; V. $\lim_{s \rightarrow \infty} [\sup_{t \in \Delta_\delta} |K(s, t)|] = 0$

où $\Delta_\delta = [a, -\delta] \cup [\delta, b]$, $\delta > 0$; VI. $|K(s, t)| < C(\delta)$, $s \in S$, $t \in \Delta_\delta$, $\delta > 0$; VII. Soit $\mathfrak{K}(s, t) = \sup_{a \leq \theta \leq t} |K(s, \theta)|$, si $a \leq t < 0$ et $\mathfrak{K}(s, t) = \sup_{t \leq \theta \leq b} |K(s, \theta)|$, si $0 \leq t \leq b$,

$\int_a^b \mathfrak{K}(s, t) dt < C$; VII*. $\mathfrak{K}(s, t) = K(s, t)$; VIII. $|K(s, t)| < C(s)$. On a les impli-

cations I, II \Rightarrow III; V \Rightarrow IV; VII*, I \Rightarrow VII; VII \Rightarrow III; VII \Rightarrow VI. — Les prin-

cipaux résultats sont les suivants: 1. Si $K(s, t)$ satisfait à I., IV., VII. alors pour $f(x)$ intégrable - L $g(x) = f(x)$ en tout point x où $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt = 0$, donc presque partout. 2. Si $K(s, t)$ satisfait à I., IV., VII*. alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt = +\infty$$

entraîne $g(x) = +\infty$. 3. Il existe un noyau $K(s, t)$ satisfaisant à I.—VI., VIII. et une fonction bornée et intégrable $f(x)$, tels que $\lim g(x, s)$ n'existe pas sur un

ensemble de mesure positive. 4. Soit $K_i(s, t)$ ($s \in S_i$; $i = 1, \dots, n$) un système fini de noyaux satisfaisant aux conditions I., IV., VII., soit $1 \leq p < \infty$. Soient M_1 un ensemble de mesure nulle du type $G_{\delta\sigma}$ et M_2 un ensemble de mesure nulle du type G_δ , M_1 et M_2 disjoints. Il existe une fonction $f(x) \in L^p(a, b)$ telle que $g_i(x) = f(x)$ pour $x \in C(M_1 \cup M_2)$, $0 < \lim_{s \rightarrow \infty} g_i(s, x) - \lim_{s \rightarrow \infty} g_i(s, x) < \infty$ pour $x \in M_1$ et

$\lim_{s \rightarrow \infty} g_i(s, x) - \lim_{s \rightarrow \infty} g_i(s, x) = \infty$ pour $x \in M_2$. 5. Soit $K_i(s, t)$ ($s \in S_i$; $i = 1, \dots, n$)

un système fini de noyaux satisfaisant aux conditions I. IV. VII*, soit $1 \leq p < \infty$. Soient M_1, M_2, M_3, M_4 quatre ensembles disjoints de mesure nulle, M_1 du type $G_{\delta\sigma}$, M_2, M_3, M_4 du type G_δ . Il existe une fonction $f(x) \in L^p(a, b)$ telle que $g_i(x) = f(x)$ pour $x \in C(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4)$, $0 < \lim_{s \rightarrow \infty} g_i(s, x) - \lim_{s \rightarrow \infty} g_i(s, x) < \infty$ pour

$x \in M_1$, $\lim_{s \rightarrow \infty} g_i(s, x) - \lim_{s \rightarrow \infty} g_i(s, x) = \infty$ pour $x \in M_2$, $\lim_{s \rightarrow \infty} g_i(s, x) = \infty$ pour $x \in M_3$ et $\lim_{s \rightarrow \infty} g_i(s, x) = -\infty$ pour $x \in M_4$. La définition des ensembles Φ_k^n

(p. 95) a échappé au rapporteur.

Horváth (Paris).

Ghizzetti, Aldo: Sul problema dei momenti. *Rend. Sem. mat., Torino* **8**, 93—107 (1949).

Après avoir rappelé quelques théorèmes classiques, l'A. énonce une condition nécessaire et suffisante pour que le problème des moments $\int_a^b x^n dF(x) = \mu_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ait une solution absolument continue. *Horváth (Paris).*

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Godement, Roger: *Théorèmes taubériens et théorie spectrale.* Ann. sci. École norm. sup., III. S. 64, 119—138 (1947).

G sei im folgenden eine beliebige lokalkompakte Abelsche Gruppe. Die für das Haarsche Maß dx auf G summierbaren Funktionen $f(x)$ bilden bezüglich der Norm $\|f\|_1 = \int |f(x)| dx$ und der Multiplikation $f * g(x) = \int f(xy^{-1})g(y) dy$ einen Ring L^1 , der bis auf das Fehlen des Einheitselementes alle Forderungen für einen normierten Ring im Sinne von Gelfand erfüllt. Ist $\mu(f)$ ein beschränktes, lineares, multiplikatives Funktional auf L^1 , so gibt es einen Charakter $\hat{x}_\mu \in \hat{G}$, so daß $\mu(f) = \hat{f}(\hat{x}_\mu)$ ist, \hat{f} die Fouriertransformierte von f . Ferner gilt: Ist \hat{K} eine kompakte Teilmenge von \hat{G} , $f \in L^1$ eine Funktion, deren Fouriertransformierte nirgends auf \hat{K} verschwindet, so gibt es ein $g \in L^1$ mit $\hat{g}(\hat{x}) = 1/\hat{f}(\hat{x})$ auf \hat{K} . Daraus ergibt sich in Verallgemeinerung eines Satzes von N. Wiener der Taubersche Satz: J sei ein abgeschlossenes Ideal von L^1 . Es ist $J = L^1$ dann und nur dann, wenn zu jedem $\hat{x} \in \hat{G}$ ein $\hat{f} \in J$ existiert mit $\hat{f}(\hat{x}) \neq 0$. Der duale Raum zu L^1 ist der Raum L^∞ der auf J meßbaren und bis auf eine Menge vom Maß Null beschränkten Funktionen $\varphi(x)$. Jeder schwach abgeschlossene lineare Teilraum V' von L^∞ , der $\neq 0$ und translationsinvariant ist [d. h. mit $\varphi(x)$ stets $\varphi(s^{-1}x)$ enthält, $s \in G$], enthält wenigstens einen Charakter von G . Die Gesamtheit σ aller in V' enthaltenen Charaktere heißt das Spektrum von V' . σ ist stets abgeschlossen in \hat{G} . Ist umgekehrt σ eine abgeschlossene Teilmenge von \hat{G} , so sei V'_σ der kleinste schwach abgeschlossene lineare Teilraum von L^∞ , der σ umfaßt. Ist nun V' ein translationsinvarianter, schwach abgeschlossener linearer Teilraum von L^∞ , so ist $V' \subset V'_\sigma$, falls σ eine abgeschlossene Umgebung des Spektrums von V' ist. Das Spektrum einer Funktion $\varphi(x) \in L^\infty$ ist das Spektrum des kleinsten, invarianten, schwach abgeschlossenen, $\varphi(x)$ enthaltenden linearen Teilraumes. Ist das Spektrum von $\varphi(x)$ eine kompakte Teilmenge von \hat{G} , so ist φ fast überall gleich einer gleichmäßig stetigen Funktion. Das Spektrum eines $\varphi \in L^\infty$ läßt sich auch charakterisieren als die kleinste abgeschlossene Teilmenge M von \hat{G} der Eigenschaft, daß für jede Umgebung von M φ schwacher Limes von Linearkombinationen aus Elementen dieser Umgebung ist. Das Spektrum von $\varphi + \psi$ ist in der Vereinigungsmenge der Spektren von φ und ψ enthalten und gleich dieser Menge, wenn diese Spektren fremd sind. — Es sei E ein Banachraum, $U_x, x \in G$, lineare beschränkte Operatoren in E mit $U_{xy} = U_x U_y, U_{x^{-1}} = U_x^{-1}, \|U_x X\| = \|X\|$ für jedes $X \in E$ und $(U_x X, X')$ stetig auf G für jedes $X \in E, X' \in E'$. Ist σ eine abgeschlossene Teilmenge von \hat{G} , so ist die σ zugeordnete Spektralmannigfaltigkeit in E die Menge M_σ aller $X \in E$, für die das Spektrum von $(U_x X, X')$ für jedes $X' \in E'$ in σ enthalten ist. M_σ ist stets ein abgeschlossener, bei den U_x invarianter linearer Teilraum von E . Dem Durchschnitt von Mengen σ entspricht der Durchschnitt der Spektralmannigfaltigkeiten, der Vereinigung endlich vieler kompakter disjunkter σ die direkte Summe. Es wird schließlich auf mehrere offene Fragen in dieser allgemeinen Theorie der Spektren hingewiesen.

G. Köthe (Mainz).

Godement, Roger: *Théorie générale des sommes continues d'espaces de Banach.* C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1321—1323 (1949).

Durchläuft ζ einen lokalkompakten topologischen Raum Ω und ist $E(\zeta)$ für jedes ζ ein Banachraum, so bildet die Menge der Funktionen $x(\zeta)$ mit Werten $x(\zeta) \in E(\zeta)$ einen linearen Vektorraum \mathfrak{E} . In \mathfrak{E} sei ein linearer Teilraum \mathcal{A} ausgezeichnet, so daß für jedes $x \in \mathcal{A}$ $\|x(\zeta)\|$ stetig auf Ω ist und daß die $x(\zeta), x \in \mathcal{A}$, für jedes feste ζ in $E(\zeta)$ dicht sind. Damit wird der Raum \mathfrak{E} aller stetigen $x \in \mathfrak{E}$ erklärt, das sind solche x , für die zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\zeta_0 \in \Omega$ eine Umgebung

$V(\zeta_0) \subset \Omega$ und ein $y \in A$ existiert mit $\|x(\zeta) - y(\zeta)\| < \varepsilon$ für alle $\zeta \in V(\zeta_0)$. An Beispielen wird die Wichtigkeit dieser Begriffsbildung gezeigt und eine Anzahl von Resultaten darüber angekündigt. Es sei ferner μ ein Radonsches Maß auf Ω , dann wird \mathfrak{E}^p als der Teilraum aller $x \in \mathfrak{E}$ mit der Metrik $\left[\int \|x(\zeta)\|^p d\mu(\zeta) \right]^{1/p} < \infty$ erklärt. \mathfrak{E}^p sei der Teilraum aller x , die der abgeschlossenen Hülle des Raumes $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}^p$ aller außerhalb einer kompakten Menge verschwindenden x angehören. Auf diese Verallgemeinerung der klassischen \mathfrak{E}^p -Räume lassen sich alle Sätze der Integrationstheorie übertragen. Ohne Beweise. *G. Köthe (Mainz).*

Beurling, Arne: On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta math., Uppsala **81**, 239—255 (1949).

T sei eine eigentliche Kontraktion des Hilbertschen Raumes \mathfrak{H} , d. h. $\|Tf\| \leq \|f\|$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n f\| = 0$ gilt für alle $f \in \mathfrak{H}$. Die Menge aller Eigenelemente von T sei in \mathfrak{H} fundamental, T^* sei isometrisch, schließlich sei wenigstens ein Eigenwert von T einfach. Dann gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem e_0, e_1, \dots mit $T e_0 = 0$, $T e_n = e_{n-1}$ ($n \geq 1$), $T^* e_n = e_{n+1}$ ($n \geq 0$), und alle Eigenwerte λ von T sind einfach und erfüllen das Innere des Einheitskreises, die zugehörigen Eigenelemente sind $q_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n e_n$. Ordnet man jedem $f \in \mathfrak{H}$ mit $f_n = (e_n, f)$ durch $(q_z, f) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = f(z)$ eine in $|z| < 1$ holomorphe Funktion zu, so wird dadurch \mathfrak{H} isometrisch auf den Hilbertschen Raum H der $f(z)$ mit dem skalaren Produkt $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta$ abgebildet [$f(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} f(r e^{i\theta})$ existiert fast überall und ist quadratisch summierbar]. T hat in H die Form $Tf(z) = (f(z) - f(0))/z$, $T^*f(z) = z f(z)$. Ist $f \in H$, so bezeichne C_f bzw. C_f^* die abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit, die durch die $T^n f$ bzw. $T^{*n} f$ ($n = 0, 1, \dots$) aufgespannt wird. Nach Sätzen aus der Theorie der harmonischen und analytischen Funktionen läßt sich jedes $f \in H$ eindeutig als Produkt $f(z) = f_0(z) f_1(z)$ schreiben,

$$f_1(z) = \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta + i a \right),$$

$$f_0(z) = \prod \frac{a_\nu - z}{1 - \overline{z} \overline{a_\nu}} \frac{\overline{a_\nu}}{|a_\nu|} \exp \left(- \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\alpha \right)$$

mit $\sum (1 - |a_\nu|) < \infty$, $|a_\nu| < 1$ und $\alpha(\theta)$ eine gewisse reelle, nichtabnehmende, beschränkte Funktion. f_0 heißt der innere Faktor von f . Es wird nun bewiesen, daß ein $g \in H$ dann und nur dann zu C_f^* gehört, wenn der innere Faktor von f ein Teiler des inneren Faktors von g ist. Speziell gilt $C_f^* = H$ dann und nur dann,

wenn $\delta(f) = 0$ ist, wobei $\delta(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|f(e^{i\theta})|}{|f(0)|} d\theta$ für $f(0) \neq 0$, $\delta(f) = +\infty$

für $f(0) = 0$ ist. Die durch die $z^n f(z)$, $z^n g(z)$ ($n = 0, 1, \dots$) aufgespannte lineare abgeschlossene Mannigfaltigkeit $C_{f,g}$ ist identisch mit $C_{h_0}^*$, h_0 der kleinste gemeinsame Teiler von f_0 und g_0 . Jede abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit C^* mit $T^* C^* \subset C^*$ enthält eine eindeutig bestimmte innere Funktion f_0 , so daß $C^* = C_{f_0}^*$. Schließlich wird gezeigt, daß jede abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit C mit $T C \subset C$ wenigstens ein Eigenelement $q_\lambda(z) = 1/(1 - \lambda z)$ ($|\lambda| < 1$) oder eine Funktion der

Form $\psi(z) = 1 - \exp \left(- \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - z e^{i\alpha}} d\alpha \right) \neq 0$ enthält, $\alpha(\theta)$ wie oben. *Köthe.*

Bourgin, D. G.: Approximately isometric and multiplicative transformations on continuous function rings. Duke math. J. **16**, 385—397 (1949).

Soient S_1, S_2 deux espaces compacts, $C(S_1)$ et $C(S_2)$ les algèbres normées de fonctions numériques continues dans chacun de ces espaces. L'A. montre que pour que S_1 et S_2 soient homéomorphes, il suffit qu'il existe entre $C(S_1)$ et $C(S_2)$ une ε -isométrie T , c'est-à-dire une application de $C(S_1)$ sur $C(S_2)$ telle que $\|T(x) - T(y)\| - \|x - y\| \leq \varepsilon$ quels que soient x et y dans $C(S_1)$; il existe en outre alors une isométrie U de $C(S_1)$ sur $C(S_2)$ telle que $\|T(x) - U(x)\| \leq 10\varepsilon$ pour tout x . Si R_1 et R_2 sont deux algèbres normées, H une application de R_1 sur R_2 telle que $\|H(x + y) - H(x) - H(y)\| \leq \varepsilon$ et $\|H(xy) - H(x)H(y)\| \leq \delta$ identiquement, l'A. montre que H est un isomorphisme de R_1 sur R_2 . Lorsque $R_1 = C(S_1)$ et $R_2 = C(S_2)$, et que S_1 et S_2 sont homéomorphes, il étudie enfin divers types d'applications K de R_1 sur R_2 qui sont „approximativement“ multiplicatives en des sens variés. *J. Dieudonné* (Nancy).

Nachbin, Leopoldo: Sur les algèbres denses de fonctions différentiables sur une variété. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1549—1551 (1949).

Soit M une variété r fois différentiable de dimension n , A l'algèbre des fonctions r fois continument différentiables sur M ; l'A. détermine les conditions moyennant lesquelles une partie F de A est partout dense dans A pour la topologie de la convergence uniforme dans les parties compactes de M (généralisation du théorème de Stone sur l'approximation des fonctions continues). Les conditions sont les suivantes: 1. pour chaque $\xi \in M$, il existe $f \in F$ telle que $f(\xi) \neq 0$; 2. pour tout couple d'éléments distincts ξ, η de M , il existe $f \in F$ telle que $f(\xi) \neq f(\eta)$; 3. pour chaque point $\xi \in M$ et chaque vecteur $\theta \neq 0$ tangent en ξ il existe $f \in F$ telle que $\partial f / \partial \theta \neq 0$. *J. Dieudonné* (Nancy).

Faedo, Sandro: Chiarimento a una nota del professore W. Sierpiński. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **6**, 572—576 (1949).

In einer früheren Note [Ann. Scuola norm. sup., Pisa, II. S. **10**, 209—214 (1941); dies. Zbl. **26**, 234] hat Verf. behauptet, daß sich in gewissen Räumen von stetigen Funktionen in jeder abgeschlossenen Teilmenge nach einem angebbaren Gesetz ein Element auswählen läßt. V. Sierpinski (dies. Zbl. **30**, 242) hat diese Behauptungen durch ein Gegenbeispiel angezweifelt. Verf. erklärt, die in seinen Räumen zugrunde gelegten Topologien seien schwächer als die von Sierpinski verwendeten, und gibt für seine Funktionenräume neue Beweise der behaupteten Sätze. *Köthe*.

Sheffer, I. M.: On the theory of sum-equations. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 777—788 (1949).

Es wird das unendliche Gleichungssystem (1) $a_{n0}x_n + a_{n1}x_{n+1} + \dots = c_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, mit komplexen Koeffizienten und $a_{n0} \neq 0$ für alle n betrachtet.

Es sei $A_n(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{ns}t^s$. (1) heißt k -periodisch, wenn $A_{k+n+p}(t) = A_p(t)$ für alle n und $p = 0, \dots, k-1$ gilt. Das k -periodische inhomogene System wird explizit gelöst: Die $A_n(t)$ seien für $|t| \leq q$ analytisch und es sei $\sup_n |c_n| = \delta \leq q$. Eine Lösung ist dann $x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{t^{n-1}}{A_k(t)} A_k(t; H) dt$. Dabei ist $A_k(t)$ die Determinante

$|\omega_k^{ij} A_j(\omega_k^i t)|$, $i, j = 0, 1, \dots, k-1$, mit $\omega_k = e^{2\pi i/k}$, $A_k(t; H)$ entsteht aus $A_k(t)$, indem man die erste Zeile $A_0(t), \dots, A_{k-1}(t)$ von $A_k(t)$ durch die Zeile $H_{k,0}\left(\frac{1}{t}\right)$,

$\frac{1}{t} H_{k,1}\left(\frac{1}{t}\right), \dots, \frac{1}{t^{k-1}} H_{k,k-1}\left(\frac{1}{t}\right)$ ersetzt, $H_{k,j}(t) = c_j + c_{j+k}t^k + c_{j+2k}t^{2k} + \dots$; γ ist

ein geeigneter Kreis mit einem Radius $> \delta$. Für das allgemeine System (1) ergibt sich dann unter der Voraussetzung, daß es eine Folge ganzer Zahlen k_s gibt mit $\lim_{s \rightarrow \infty} k_s \Delta_k(t; H) / \Delta_{k_s}(t) = \Lambda^*(t)$ gleichmäßig in einem geeigneten Kreisring, ebenfalls eine explizite Lösung in der Form $x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} t^{n-1} \Lambda^*(t) dt$. Schließlich werden auch noch im homogenen k -periodischen Fall explizite Lösungen angegeben. *Köthe*.

Praktische Analysis:

Fox, L.: A short account of relaxation methods. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 253—280 (1948).

Der Verf. berichtet über die hauptsächlich von R. V. Southwell und seinen Mitarbeitern in mehreren Arbeiten und Büchern ausgearbeiteten sog. „Relaxations“-Methoden (veröffentlicht in Proc. R. Soc., London 1937 bis 47, u. a.). Die zugrunde liegende Lösungsmethode für lineare Gleichungssysteme ist ein Iterationsverfahren in Einzelschritten, wie es bereits Gauß in seinen Vorlesungen über Ausgleichsrechnung zur Lösung der Normalgleichungen angewendet hat (s. Helmert: Ausgleichsrechnung, 3. Aufl., Leipzig 1924, S. 175, dort auch weitere Literaturangaben). — Während die Methode ursprünglich dazu bestimmt war, die Kräfte in einem Fachwerk zu ermitteln (daher auch der Name), hat es sich gezeigt, daß sie anwendbar ist auf alle die Probleme, die sich auf die Lösung eines Gleichungssystems zurückführen lassen. Als Anwendungen werden vom Verf. die Eigenschwingungen eines mechanischen Systemes von n Freiheitsgraden betrachtet. Hier wird die Relaxations-Methode mit dem Rayleighschen Prinzip verbunden. Weiterhin werden noch Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen gebracht. Die Differentialquotienten werden durch finite Ausdrücke ersetzt und die entstehenden Gleichungen nach der behandelten Methode gelöst. *Rudolf Ludwig* (Braunschweig).

Loud, Warren S.: On the long-run error in the numerical solution of certain differential equations. J. Math. Physics, Massachusetts 28, 45—49 (1949).

Es werde ein Näherungsverfahren r -ter Ordnung für die Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$ verwendet. Zur Untersuchung der Fehlerfortpflanzung wird die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $dy/dx = ay$ zugrunde gelegt, bei der sich der Fehler exakt angeben läßt. Nach n Schritten mit der Schrittweite h wird der relative Fehler E durch $|E| < |4n\kappa_r(ah)^{r+1}|$ abgeschätzt und bei verlangter Endgenauigkeit daraus eine obere Schranke für h aufgestellt. Beispiel eines speziellen Differenzenverfahrens. *Collatz* (Hannover).

Fricke, Arnold: Über die Fehlerabschätzung des Adamsschen Verfahrens zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung. Z. angew. Math. Mech. 29, 165—178 (1949).

Sind die Funktionen $f(x, y)$, $\vartheta(x, y)$ stetig und erfüllt $f(x, y)$ eine Lipschitzbedingung mit der Konstanten M , sind ferner $y(x)$, $\eta(x)$ Lösungen der Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$, $\eta' = f(x, \eta) + \vartheta(x, \eta)$ mit gleichen Anfangsbedingungen $y(0) = \eta(0)$, so läßt sich $y - \eta$ bekanntlich abschätzen durch

$$|y(x) - \eta(x)| \leq \varepsilon M^{-1}(e^{Mx} - 1),$$

wo ε eine obere Schranke für den Betrag des Integralmittels

$$J(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \vartheta(\xi, \eta(\xi)) d\xi = \frac{1}{x} \int_0^x g(\xi) d\xi$$

bedeutet. Verf. untersucht die Extrema der Funktion $J(x)$ und zeigt z. B., daß für eine nirgends negative periodische Funktion $g(x)$ der Periode λ , deren einzige Nullstellen bei $v\lambda$ ($v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) liegen, die im Innern der Intervalle $(v\lambda, (v+1)\lambda)$ differenzierbar ist und dort genau ein Maximum besitzt, mit wachsendem x die Maxima monoton ab-, die Minima monoton zunehmen. Diese Ergebnisse werden dann — im Anschluß an eine Arbeit von Tollmien [Z. angew. Math. Mech. 18, 83—90 (1938): dies. Zbl. 18, 83] — zur Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren von Adams benutzt. Verf. scheint aber dabei übersehen zu haben, daß in den benutzten Formeln für die Fehlerschranke Ableitungen nach der im allgemeinen nicht oder nicht genügend oft differenzierbaren Näherungslösung auftreten, und ersetzt in dem durchgeführten Zahlenbeispiel diese nicht existierenden Ableitungen durch die Ableitungen der exakten Lösung. *Weißinger* (Hamburg).

Liebmann, G.: Precise solution of partial differential equations by resistance networks. *Nature*, London **164**, 149—150 (1949).

Verf. gibt eine Darstellung von neuen Versuchen, partielle Differentialgleichungen durch Messungen an elektrischen Widerstandsnetzen zu lösen. Frühere Konstruktionen von Knorr, Spangenberg und Walters, Redshaw und Packh krankten daran, daß sie zu wenig genau waren (Fehler 1—5%). Mit einem neu konstruierten Netz von 60×20 Maschen wurden hier für den Fall axialer Symmetrie bei der Lösung der Laplaceschen Gleichung für gegebene Randwerte eine durchschnittliche Genauigkeit von $0,1\text{—}0,20_{00}$ erreicht, wobei nur etwa ein Zehntel der Zeit benötigt wurde, wie sie numerische Rechnungen nach der jetzt viel gebrauchten „Relaxation-Methode“ erfordern. Eine Beschreibung der Apparate, Meßmethode und der gewonnenen Resultate wird an anderer Stelle in Aussicht gestellt. *Ludwig.*

Victoris, L.: Ein Kurvenblatt zur Berechnung von $a \cos^2 \alpha$ und $\frac{1}{2} a \sin 2\alpha$. *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 232—253 (1949).

Die zur Auswertung tachymetrischer Messungen gebrauchten Formeln für die Entfernung $L = a \cos^2 \alpha$ und den Höhenunterschied $h = \frac{1}{2} a \sin 2\alpha$ werden beide in einem Kurvenblatt mit kartesischen Koordinaten (x, y) dargestellt, indem man setzt: $x = \alpha$ und $y = \log \cos^2 \alpha$ für L bzw. $y = \log (\frac{1}{2} \sin 2\alpha)$ für h . Auf diesem Kurvenblatt wird mit einem logarithmischen Maßstab gemessen, der parallel der y -Achse bei $x = \alpha$ mit der Stelle a an die x -Achse gelegt wird. In den Schnittpunkten des Maßstabes mit den Kurven L und h werden die gesuchten Werte abgelesen. — Die Genauigkeit ist für die Praxis ausreichend. Das Kurvenblatt ist einfach zu handhaben und bequemer als der Rechenschieber, bei dem man für a und α je zweimal einstellen muß.

Rudolf Ludwig (Braunschweig).

Pentkovskij, M. V.: Nichtprojektive Transformationen der Nomogramme von Gleichungen der dritten nomographischen Ordnung. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **62**, 589—590 (1948) [Russisch].

Wenn eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen z_1, z_2, z_3 in die Form $f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3) = 0$ gebracht werden kann, gibt es für die Gleichung unendlich viele Anamorphosen und Darstellungen durch Fluchtentafeln. Diese lassen sich in 8 Gattungen einteilen, sie sind nicht projektiv. Es wird gezeigt, wie man zunächst „Skelette“ für die betreffenden Nomogramme herstellen kann, um diese dann durch projektive, insbesondere affine, Transformation den Forderungen der Praxis möglichst anzupassen.

Nyström (Helsinki).

Couffignal, Louis: Calcul d'un quotient ou d'une racine carrée dans le système de numération binaire. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **229**, 488—489 (1949).

1. In jedem Positionssystem gilt für die Division, daß man den Divisor, mit der höchsten Stelle des Dividenden anfangend, unter den Dividenden bringt und abzieht „bis es nicht mehr geht“. Die erste Stelle des Quotienten ist die Zahl der möglichen Subtraktionen. Dann schiebt man den Divisor eine Stelle nach rechts usw. Man kann auch abziehen, bis man einen negativen Rest erhält, den Divisor weiter schieben und addieren, bis man einen positiven Rest erhält usw., wie das bei vollautomatischen Maschinen geschieht. — Im System mit der Basis 2 ist niemals mehr als eine Subtraktion oder Addition erforderlich. — 2. In jedem Positionssystem gilt für die Quadratwurzelbestimmung, daß man die Stellen der Zahl, rechts anfangend, in Gruppen von zwei verteilt und von der linken Gruppe das größte Quadrat, a^2 , das noch einen positiven Rest gibt, abzieht. Den Rest vermindert man mit der Zahl, die entsteht, wenn man an das Doppelte der erhaltenen Zahl die Stelle p anhängt und mit p multipliziert: Die größte Zahl p , die unter den ersten vier Stellen noch einen positiven Rest gibt bei der Subtraktion, ist die zweite Stelle der Wurzel usw. — Im Dualsystem ist Verdoppeln „Null anhängen“ und p kann nur 0 oder 1 sein. Wenn also $a \cdot 1$ abgezogen werden kann, ist die nächste Stelle der Wurzel 1, andernfalls 0 usw. — Diese Regeln, obwohl evident, werden für das Dualsystem

ad hoc aus einigen Ungleichungen hergeleitet. Verf. bemerkt, daß die Wurzelberechnung 90% Zeitersparnis gibt im Vergleich mit der Heron-Formel. Ich glaube jedoch, daß das nur für die ersten Stellen der Fall sein kann, genau wie im Dezimalsystem [vgl. C. Störmer, *Astrophys. Norwegica* 2, 4 (1937)], bei Maschinenrechnung.

E. M. Bruins (Amsterdam).

Murray, F. J.: Linear equation solvers. *Quart. appl. Math.* 7, 263—274 (1949).

Anschließend an Überlegungen in des Verf. Theorie der mathematischen Maschinen wird die Möglichkeit der Konstruktion von Maschinen zur Lösung linearer Gleichungssysteme untersucht, die einer der gesuchten Lösung entsprechenden Gleichgewichtslage durch wiederholte Korrekturen zustreben, die durch einen linearen Operator mit konstanten Koeffizienten bestimmt sind. Diese Koeffizienten sind von denen der Gleichung abhängig. Die Maschinen können kontinuierlich oder in diskreten Einzelschritten arbeiten. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß das Arbeitsverfahren gegen die Lösung konvergiert, wobei natürlich vorausgesetzt ist, daß diese eindeutig bestimmt ist. Diese Bedingungen sind analog zu den Gleichgewichtsbedingungen eines linearen Netzwerkes. Im ersten Fall müssen die Realteile der Wurzeln der charakteristischen Gleichung der die Bewegung der Maschine bestimmenden Gleichung negativ sein, im zweiten, in dem man auf eine Differenzengleichung kommt, müssen sie innerhalb des Einheitskreises um den Punkt $(-1; 0)$ liegen. Die Sätze, die nötig sind, um diese Resultate zu gewinnen, werden für beide Fälle abgeleitet. Es können solche Maschinen entworfen werden, die stabil sind, auch wenn die Koeffizientendeterminante Null ist. Ist diese nicht Null, so arbeiten sie nur dann erfolgreich, wenn das Quadrat dieser Determinante in gewisser Weise in die charakteristische Gleichung der Bewegungsgleichung eingeht.

Willers (Dresden).

McCann jr., G. D. and C. H. Wilts: Application of electric-analog computers to heat-transfer and fluid-flow problems. *J. appl. Mech.*, New York 16, 247—258 (1949).

Nach kurzer Beschreibung des „Electric-analog Computer“, der die Analogie zwischen den Gleichungen bestimmter elektrischer Vorgänge mit denen für andere wie Wärmeleitung, Flüssigkeitsströmung usw. zur genäherten Lösung dieser Probleme benutzt, wird zunächst der Temperaturanstieg in einer rotierenden elektrischen Maschine in dieser Weise behandelt, ein Problem, das auf zwei simultane gewöhnliche Differentialgleichungen führt. Bei den übrigen Problemen handelt es sich um partielle Differentialgleichungen, in denen zum mindesten die Ableitungen nach den Ortskoordinaten durch Differenzenquotienten ersetzt werden. Für die Zeit wird bei einigen Problemen genau so verfahren, bei anderen entspricht der zeitliche Ablauf dem des Analogievorganges. Schaltungsskizzen für die einzelnen Gleichungen werden gegeben. Genauer erörtert wird das Verfahren an drei durchgeführten Beispielen: der Temperaturverteilung im Rotor einer Gasturbine, der Bestimmung des Potentials und der Strömung kompressibler Flüssigkeiten. Teilweise werden dabei Iterationsmethoden verwendet. Nach Angabe der Verff. reicht die erzielte Genauigkeit für die Praxis aus.

Willers (Dresden).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

●**David, F. N.:** Probability theory for statistical methods. Cambridge: At the University Press, 1949. IX, 230 p. 15 s. net.

Absicht der Verf. war, „in elementar-mathematischer Sprache jene Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Beweisen zusammen zu stellen, welche für Studenten der elementaren Statistik“ nach den Erfahrungen eines durch mehrere Jahre gehaltenen Ergänzungskollegs „sich als nützlich erwiesen haben“. Der Ausdruck „elementar-mathematisch“ ist hier nicht als

Vermeidung der Infinitesimalrechnung zu deuten, sondern als Verzicht auf eine maßtheoretische Einstellung und somit als ein Verweis auf die Behandlung abzählbar oder stetig unendlicher Wahrscheinlichkeitsfelder durch einfache Ähnlichkeitsangabe. Da die gegebenen Literaturverweise im allgemeinen recht konservativ sind, kann dies nur bedauert werden. Soweit es die in den ersten neun Kapiteln behandelte kombinatorische Analyse anbelangt, wie die binomiale Verteilung und deren verschiedene Grenzverhalten, den Satz von Bayes, Anwendungen in der Vererbungslehre, multinomiale Verteilung, genügt natürlich der klassische Rahmen. Ernsthafte Schwierigkeiten ergeben sich aber in den nächsten fünf Kapiteln. Sie behandeln — ohne Heranziehung der, unstetige und stetige Verteilungen überbrückenden, Verteilungsfunktion — die Zufallsveränderliche betreffenden Sätze und Ungleichungen, Gesetze der großen Zahlen, Mittelwert und Streuungsquadrat der Stichprobenparameter bei endlichen und unendlichen Gesamtheiten, die Lexissche Streuungsquadrat-Zerlegung sowie die Markoffsche Schätzungstheorie mit ihrer Neymanschen Anwendung auf gewöhnliche bzw. restringierte geschichtete Stichprobenerhebungen. Die drei abschließenden Kapitel behandeln — formal — die Anwendungen der charakteristischen Funktion auf Momenten- und Kumulantenberechnungen sowie beim Beweis der Stabilität der grundlegenden Verteilungen und dringen bis zu dem Grenzwertsatz unter den vereinfachten Ljapunoffschen Bedingungen vor. Die hier vorkommende Behauptung, die Fouriersche Integraltransformation sei „bei absolut stetiger Zufallsveränderlichen“ einfach umkehrbar, dürfte ebenso ein Schriftfehler sein, wie beim Bayesschen Satz die Erklärung, daß er nur bei Kenntnis der Anfangsverteilung „gelte“. Der erste ist auf „bei Zufallsveränderlichen mit etwa differenzierbarer Verteilungsdichte“, der zweite auf „statistisch verwendbar“ zu berichtigen. Trotz der geübten Kritik kann festgestellt werden, daß es sich um einen verdienstvollen Versuch handelt, ein reiches Material dem angehenden oder praktischen Statistiker ohne mathematische Überbelastung in Begleitung von vielen interessanten und teilweise originellen Beispielen beizubringen.

Szentmártony (Budapest).

Kappos, D. A.: Zur mathematischen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1948, 309—320 (1949).

Sowohl bei der Mises-Waldschen empirischen, als auch bei der Kolmogoroffschen ideellen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie wird die Wahrscheinlichkeit 0 des unmöglichen bzw. 1 des gewissen Ereignisses vielen möglichen bzw. ungewissen Ereignissen zugeordnet. Außerdem entsprechen bei beiden die nicht meßbaren Teilmengen einer Grundmenge keinen realisierbaren Ereignissen, obwohl ihre Elemente als solche betrachtet werden müssen. Nun bildet aber innerhalb des — in beiden Theorien zugrunde gelegten — Körpers F der meßbaren Teilmengen einer Grundmenge das System $F/N = F^*$ der Restklassen mod N , dem Ideal der Nullmengen, mit F und N gleichzeitig einen Ring mit idempotenten Elementen, also einen zu F homomorphen Booleschen Verband, in welchem das von F übernommene Wahrscheinlichkeitsmaß nicht nur nichtnegativ und totaladditiv, sondern bereits reduziert ist, d. h. 0 nur dem der Unmöglichkeit entsprechendem Null- bzw. 1 nur dem der Gewißheit entsprechendem Einselement zuordnet. Es läßt sich so mit Vermeidung des Begriffs der Punktmenge eine Wahrscheinlichkeitstheorie aufbauen, welche sich auf einen mit nichtnegativem, totaladditivem und reduziertem Inhaltsmaß versehenen Booleschen Verband mit Einheit als Wahrscheinlichkeitsfeld stützt. In der Note werden die Grundbegriffe einer solchen Theorie skizziert. Ein solches Wahrscheinlichkeitsfeld wird, falls es empirisch ist, d. h. höchstens abzählbar viele Elemente besitzt, durch ein Schachtelungsverfahren zu einem voll-empirischen Feld, sonst durch Einführung der Entfernung und Übergang auf die vollständige Hülle des Feldes zu einem vollideellen Feld erweitert. Die erweiterten Felder sind dann abgeschlossen gegenüber gewöhnlicher Konvergenz oder solcher nach Wahrscheinlichkeit. Es wird auch der Begriff der Zufallsveränderlichen so erfaßt, daß die Ungereimtheiten, welche beim mengentheoretischen Aufbau durch den Vergleich dieser Veränderlichen mit meßbaren Punktfunktionen auftreten und nur nach Einführung der Verteilungsfunktionen ausgeschaltet werden können, sich nicht mehr zeigen.

Szentmártony (Budapest).

Loève, Michel: Indicateurs abstraits et champs stochastiques. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1561—1564 (1949).

Verf. gibt einen äußerst gedrängten Bericht seiner an der Universität in London 1947 gehaltenen Vorträge. Diese behandelten eine abstrakte Verallgemeinerung des Begriffs der Zufallsveränderlichen und ihres Erwartungswertes. — Im Borelschen Feld der Teilmengen A, B, \dots einer Menge U wird ein Borelsches Feld von abstrakten Elementen, den idempotenten Indikatoren $I(A), I(B), \dots, I(U) = 1$, wie folgt, zugeordnet. 1. Dem $\bar{A} = U - A$ soll $1 - I(A)$, 2. dem Durchschnitt von A_1, A_2, \dots soll $\prod_k (I(A_k))$ und 3. der Vereinigungsmenge der A_1, A_2, \dots

soll 1 — dem idempotenten Indikator des Durchschnitts von A_1, A_2, \dots als idempotenter Indikator entsprechen. Die Rolle der Zufallsveränderlichen spielen dann die einfachen Indikatoren $X = \sum_{k=1}^m x_k I(A_k)$, $Y = \sum_{l=1}^n y_l I(B_l)$, ... mit reellen oder komplexen x_k, y_l, \dots oder allgemeiner mit den Elementen eines Banachschen Ringes und die Rolle ihrer Funktionen die

$$f(X, Y, \dots) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \dots f(x_k, y_l, \dots) I(A_k, B_l, \dots).$$

Der Menge der einfachen nichtnegativen Funktionen, die eine obere Grenze $x(u) \geq 0$ besitzen, entspricht eine Menge von einfachen Indikatoren, welche den Indikator $X = \int x(u) I(du)$, die obere Grenze dieser Menge definiert. Schließlich soll ein Erwartungswert definiert werden, welcher die Bedingungen a) $E I(A) \geq 0, E(1) = 1$, b) $E[x I(A) + y I(B)] = x E I(A) + y E I(B)$ und in unendlichen Feldern noch c) $E \lim X_n = \lim E X_n$ erfüllt. Es werden dann zwei bzw. drei Beispiele für solche endlichen bzw. unendlichen Zufallsfelder angegeben. Das interessanteste ist das auf einer Zerlegung $I(u)$ der Einheit in einem Hilbertschen Raume definierte unendliche Feld. Die X sind hier Operatoren von der Gestalt $\int x(u) I(du)$ mit $E X = \sum_k |c_k|^2 (X f_k, f_k)$, wo $\sum_k |c_k|^2 = 1$ ist und die $(f_k, f_l) = \delta_{kl}$ sind.

Szentmártony (Budapest).

Otter, Richard: The multiplicative process. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 206—224 (1949).

Vervielfachungs- oder Verzweigungsvorgänge werden gewöhnlich durch die Folge der als Zufallsveränderlichen aufgefaßten „Teilchenzahlen“ X_n in der n -ten „Generation“ definiert, die folgende speziellen Verteilungen besitzen. Es ist $P(X_0 = 1) = 1$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} P(X_1 = \nu) = 1$ und, wenn $X_n = 0$, dann $P(X_{n+1} = 0) = 1$, während sonst X_{n+1} wie die Summe von X_n unabhängigen Zufallsveränderlichen, welche die Verteilung von X_1 besitzen, verteilt ist. Zur Behandlung solcher Vorgänge sind von Hawkins und Ulam bereits 1944 graphentheoretische Hilfsmittel herangezogen und — wie Ref. bemerkt — von Everett und Ulam unlängst (siehe dies. Zbl. 32, 291) ziemlich weitgehend ausgebildet worden. Die auf Anregung von E. Artin entstandene vorliegende Arbeit betrachtet als Menge der elementaren Ereignisse die Menge der zu dem einzigen Urteilchen gehörenden Abstammungsbäume. Genauer jene endlichen oder unendlichen Folgen von Teilchen, bei welchen mit dem Auftritt eines Teilchens nicht nur dessen sämtliche Ahnen, sondern auch ältere Geschwister vertreten sind. Eine additive Klasse der Untermengen dieser Menge wird als ein Ereignis betrachtet und innerhalb dieser Klasse ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert. [In der Formelgruppe (7) soll $p_{k\nu}$ an Stelle von $p_{\nu\nu}$ stehen.] Es ergeben sich so folgende weitgehenden Resultate. Eine Rekursionsformel bzw. eine asymptotische Schätzung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Baum 1, 2, ... Knotenpunkte (Teilchen) besitzt. Ferner die Verteilung der Zweigeanzahl bei der Wurzel (Urteilchen) irgendeines endlichen oder unendlichen Baumes oder eines Baumes mit n Knotenpunkten und in diesem Fall die asymptotische Verteilung

für $n \rightarrow \infty$. Sodann die Verteilung der Knotenpunkte mit k -facher Verzweigung bei endlichen Bäumen bzw. bei Bäumen mit n Knotenpunkten und in diesem Fall die asymptotische Verteilung für $n \rightarrow \infty$. *Szentmártony* (Budapest).

Anderson, O.: Die Begründung des Gesetzes der großen Zahlen und die Umkehrung des Theorems von Bernoulli. *Dialectica*, Neuchâtel **3**, 65—77 (1949).

Wenn die Wahrscheinlichkeitstheorie, sagt Verf., als ein Kapitel der reinen Mathematik aufgebaut wird, muß man dafür sorgen, daß von ihren Theoremen gewisse Übergänge, Brücken, zur Welt der realen Tatsachen geschaffen werden, dies um so mehr, als das „Gesetz“ oder besser das „Prinzip der großen Zahlen“ kein Theorem der reinen Mathematik allein ist, sondern zu seiner Begründung auch gewisser Feststellungen und Erfahrungen aus dem täglichen Leben bedarf. Verf. lenkt die Aufmerksamkeit im besonderen auf die Begründung des Gesetzes der großen Zahlen durch Cournot (1843) und zeigt, daß die „Cournotsche Brücke“ die Umkehrung des Theorems von Bernoulli ohne Rückgriff auf das Theorem von Bayes ermöglicht. *P. Lorenz* (Berlin).

Dvoretzky, Aryeh: On the strong stability of a sequence of events. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **20**, 296—299 (1949).

Es sei $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ eine Folge von abhängigen oder unabhängigen Ereignissen, die für die gleiche Versuchsreihe definiert sind, R_n die Wiederholungsfunktion (= Anzahl derjenigen unter den ersten n Ereignissen, die aufgetreten sind) und $f_n = R_n/n$ die Häufigkeitsfunktion der Folge. Eine derartige Ereignisfolge hat M. Loève [Etude asymptotique des sommes de variables aléatoires liées, *J. Math. pur. appl.* **24**, 249—318 (1945)] stark stabil genannt, wenn $\varphi_n = f_n - \bar{f}_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $\bar{f}_n = E\{f_n\}$, im Sinne von A. Kolmogoroff (Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1933, S. 58; dies. Zbl. **7**, 216) stark stabil ist, d. h. wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(\sup_{r > n} |\varphi_r| > \varepsilon) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Wird

$$\beta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Pr(A_i); \quad \gamma_n = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq n} \Pr(A_\mu A_\nu); \quad \delta_n = \gamma_n - \beta_n^2$$

gesetzt, so gilt nach Loève: „Wenn $n\delta_n$ beschränkt ist, dann ist die Ereignisfolge stark stabil.“ Verf. zeigt nun, daß sogar der Satz gilt: „Wenn $\sum \delta_n/n$ konvergent ist, dann ist die Ereignisfolge stark stabil.“ Insbesondere hat sie diese Eigenschaft, wenn für ein $\varepsilon > 0$ die Folge $n^\varepsilon \delta_n$ beschränkt ist. *Georg Friede* (Göttingen).

Cramér, Harald: On the factorization of certain probability distributions. *Ark. Mat.*, Stockholm **1**, 61—65 (1949).

Eine Verteilungsfunktion (Vf) $F(x) = \Pr(\xi \leq x)$ der Zufallsveränderlichen ξ heißt teilbar, falls sie in ein Faltungsprodukt

$$F = F_1 * F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-t) dF_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-t) dF_1(t) = F_2 * F_1$$

zerlegbar ist mit den Teiler-Vfen F_1, F_2 , die von den Einheits-Vfen $E(x-m) = 0$ bzw. 1 für $x < \text{bzw.} \geq m$ verschieden sind. Bei $F = (\dots(G_n * G_n) * \dots * G_n) * G_n = G_n^{[n]}$ mit einer Vf G_n für jedes natürliche n heißt F unendlich teilbar. In diesem Fall ist nach P. Lévy der natürliche Logarithmus der charakteristischen Funktion von F eindeutig in der Gestalt

$$\log \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \mu it - \sigma^2 t^2/2 + \int_{-\infty}^{\infty} [e^{itx} - 1 - itx/(1+x^2)] dM(x)$$

darstellbar, und zwar mit reellen Konstanten μ, σ und einer sowohl in $(-\infty, 0)$ als auch in $(0, \infty)$ nicht abnehmenden, also fast überall differenzierbaren Funktion

$M(x)$, welche den Bedingungen $M(-\infty) = M(\infty) = 0$, $\int_{-1}^1 x^2 dM(x) < \infty$ genügt.

Beschränkt man sich bei einem unendlich teilbaren F auf ebensolche Teiler F_r , dann kann also die Zerlegung von F auf jene von $\mu = \sum \mu_r$, $\sigma^2 = \sum \sigma_r^2$, $M(x) = \sum M_r(x)$ zurückgeführt werden. P. Lévy zeigte aber an einem Beispiel, daß es unendlich teilbare Vfen mit mindestens einem nicht unendlich teilbaren Teiler gibt. — Verf. zeigt nun einfach und klar, daß bei einer unendlich teilbaren Vf dies sicherlich der Fall ist, wenn man zwei positive Konstanten k, c so finden kann, daß für die entsprechende Lévy'sche Belegungsfunktion $M'(x) > k$ ist fast überall in einem der Intervalle $(-c, 0)$ oder $(0, c)$. Das läßt sich z. B. von den Γ -Vfen mit $\sigma = 0$, $M(x) = 0$ bzw. $M'(x) = \lambda x^{-1} e^{-\alpha x}$ für $x < 0$ bzw. > 0 und von den stabilen nicht normalen Vfen mit $\sigma = 0$, $M'(x) = A|x|^{-\alpha-1}$ bzw. $Bx^{-\alpha-1}$ für $x < 0$ bzw. > 0 bei $0 < \alpha < 2$ feststellen. Bei der vom Verf. vorgenommenen Zerlegung ergibt sich neben dem nicht unendlich teilbaren Faktor ein solcher unendlich teilbarer, von welchem immer wieder weitere, nicht unendlich teilbare Faktoren abgetrennt werden können. Da nach Khintchine letztere unzerlegbare Teiler besitzen, ist eine unendlich teilbare Vf der angegebenen Art sogar durch ein unendliches Faltungsprodukt von unzerlegbaren Vfen teilbar. *Szentmártony* (Budapest).

Kac, M. and A. J. F. Siegert: An explicit representation of a stationary Gaussian process. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **18**, 438—442 (1947).

Ist $\varrho(t)$ [$\varrho(0) = 1$] die Korrelationsfunktion eines stationären Gaußschen Prozesses und sind $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die Eigenwerte der Integralgleichung

$$\int_0^T \varrho(s-t) f(t) dt = \lambda f(s)$$

mit den entsprechenden normalisierten Eigenfunktionen $f_1(t), f_2(t), \dots$ und G_1, G_2, \dots gegenseitig unabhängige, mit dem Mittelwert 0 und Einheitsstreuung normalverteilte Zufallsvariable, so definiert, wie Verff. zeigen, die Reihe

$$x(t) = \sum_j \lambda_j^{1/2} G_j f_j(t)$$

einen Gaußschen stochastischen Prozeß in $(0, T)$ mit gegebener Korrelationsfunktion. Nach Untersuchung der Konvergenzeigenschaften der Reihe $x(t)$ wird ferner

gezeigt, daß die Verteilung von $T^{-1/2} \left\{ \int_0^T x^2(t) dt - T \right\}$ asymptotisch gegen die Gauß-

verteilung mit dem Mittelwert 0 und der Streuung $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho^2(\tau) d\tau$ geht.

Georg Friede (Göttingen).

Tortrat, Albert: Sur les fonctions de corrélation des processus de Markoff. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **228**, 1559—1561 (1949).

Die Note führt durch $Tf = \int f(y) dy P(x, y; s, t)$ einen linearen Operator $T(s, t)$ über die Zufallsfunktion eines Markoffschen Vorganges mit stetigem (Zeit-) Parameter ein. Hierbei bezeichnet $P(x, y; s, t)$ die Verteilungsfunktion von Y im Zeitpunkt $t \geq s$ unter der Bedingung, daß $X = f(x)$ in s bekannt ist. Es wird die Kompositionsregel $T(s, t) = T(s, u) T(u, t)$ bei $s \leq u \leq t$ angeführt sowie die Gestalt des Operators $T(s, t) = \alpha(s) \alpha^{-1}(t)$ im nichtstationären, oder $T(u) = J e^{ia}$ bzw. $J e^{ia_1} + J e^{ia_2}$ im stationären Fall mit $u - t = s$ und $J = \lim_{u \rightarrow 0} T(u)$ ange-

geben, sowie der spektrale Charakter der Operatoren a, a_1, a_2 diskutiert. Der Zusammenhang von T mit der Korrelationsfunktion $\varrho(s, t)$ des Vorganges ist aus der selbst in der Angabe der Bezeichnungen lakonisch verfaßten Note nicht ersichtlich.

Szentmártony (Budapest).

Yosida, Kôzaku: Brownian motion on the surface of the 3-sphere. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **20**, 202—296 (1949).

Verf. faßt den zeitlich und räumlich stetigen Markoffschen Prozeß als eine Brownsche Bewegung im homogenen Raum S auf und zeigt, daß unter der Voraussetzung, daß die beiden ersten Momente $a^i(x)$ und $b^{ij}(x)$ [vgl. A. Kolmogoroff: „Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse“, Math. Ann., Berlin 108, 149—160 (1933); dies. Zbl. 7, 22] Ableitungen von genügend hoher Ordnung besitzen, eine und (im wesentlichen) nur eine Brownsche Bewegung auf der Oberfläche der dreidimensionalen Kugel S^3 existiert.

Georg Friede (Göttingen).

Pollaczek, F.: Application d'opérateurs intégral-combinatoires dans la théorie des intégrales multiples de Dirichlet. Ann. Inst. Henri Poincaré 11, 113—133 (1949).

Es bezeichne x_μ bzw. \bar{x}_μ bei reellen und von Null verschiedenen x_1, \dots, x_n das μ -te Element in zu- bzw. abnehmender Größenordnung und $x^+ = \max(x, 0)$. Man betrachte ferner die mit

$$2\pi i C_\nu = \int_{\varepsilon_\nu - i\infty}^{\varepsilon_\nu + i\infty} \dots \frac{dz_\nu}{z_\nu}, \quad 2\pi i C'_\nu = \int_{-\varepsilon_\nu + i\infty}^{-\varepsilon_\nu - i\infty} \dots \frac{dz_\nu}{z_\nu},$$

bei $\nu = 1, 2, \dots; 0 < \varepsilon_\nu \ll 1$ gebildeten Operatoren $R_n^\lambda = \sum C'_{i_1} \dots C'_{i_\lambda} C_{i_{\lambda+1}} \dots C_{i_n}$

über alle Permutationen (i_1, \dots, i_n) von $(1, \dots, n)$ bei $\lambda = 0, 1, \dots$ sowie $S_n^\mu = \sum_{\lambda=0}^{\mu} R_n^\lambda$

bei $\mu = 0, 1, \dots, n$ und $T_n^{\lambda, \mu} = \sum C'_{i_1} \dots C'_{i_\lambda} \sum_{\tau=0}^{\mu-\lambda} R_{n-\lambda}^\tau$ bei $0 \leq \lambda \leq \mu \leq n$ und

$T_0^{0, \mu} = 1$, $T_n^{\lambda, \mu} = 0$ bei $n < \lambda$ oder $\mu < \lambda$. Es ist bekanntlich $s(x_\nu) = C_\nu e^{x_\nu z_\nu} = 1$ bzw. 0 für $x_\nu >$ bzw. < 0 und das mit C'_ν gebildete $s'(x_\nu) = s(-x_\nu)$, also $s(x_\nu) + s'(x_\nu) = 1$. Die mit Formeln ziemlich überladene Arbeit zeigt, daß gewisse Funktionen der x_k , in welchen ihre Größenordnung eine Rolle spielt, sowie Produkte solcher Funktionen mit Ausdrücken, welche mit den angegebenen Operatoren aus analytischen Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen gebildet sind, durch solche Ausdrücke allein dargestellt werden können. So ist z. B. bei $\sum_1^n x_\nu z_\nu = s_n$

und $\sum_1^n z_\nu = t_n$: $s(x_{\mu+1}) = S_n^\mu e^{s_n}$ und $\zeta^{-1} e^{-\zeta x_{\mu+1}^+} = S_n^\mu e^{-s_n} / (\zeta - t_n)$ bei positivem $\Re(\zeta)$ und $\Re(\zeta - t_n)$. Oder bei $\mu_1 \geq \mu \geq 0$ und für $\Re(z) < c$ regulärem $f(z) = O(|z|^{-1})$:

$$s(x_{\mu+1}) S_n^\mu e^{s_n} f(t_n) = S_n^\mu e^{s_n} f(0)$$

und $e^{-\zeta x_{\mu+1}^+} S_n^\mu e^{-s_n} f(t_n) = S_n^\mu e^{-s_n} [t_n f(t_n - \zeta) - \zeta f(0)] / (t_n - \zeta)$.

Mit Hilfe der mitgeteilten Überlegungen und Formeln soll in zwei folgenden Arbeiten die Bestimmung der Verteilungsfunktion der Wartezeit bei Fernsprecher-Zentralen auf die Auflösung von linearen Integralgleichungen zurückgeführt werden. (Siehe nachsteh. Referat.)

Szentmártony (Budapest).

Pollaczek, F.: Reduction de différents problèmes concernant la probabilité d'attente au téléphone, à la résolution de systèmes d'équations intégrales. Ann. Inst. Henri Poincaré 11, 135—173 (1949).

Laufen in eine mit Anrufsammler ausgestattete Fernsprecher-Zentrale innerhalb $(0, T)$ etwa N Anrufe in den zufälligen Zeitpunkten $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq T$ ein, welche — sobald für sie der Reihenfolge nach eine der $l \geq 1$ Leitungen frei wird — diese mit den positiven zufälligen Sprechdauer t_1, \dots, t_n besetzen, dann ist die Wartezeit τ_m für den m -ten Anruf Null oder die l -t-größte unter den Zahlen $(x_\nu + \tau_\nu + t_\nu) - x_m$ bei $\nu = 1, \dots, m-1$, je nachdem letztere

\leq oder > 0 ist. Ist $s(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^{\tau p} \frac{dp}{p} = 1$ bzw. 0 für $\tau >$ bzw. < 0 , dann ist also $s(t - \tau_m) = 1$ für alle (x_ν, t_ν) , für welche $\tau_m < t$ ist, und sonst Null, so daß sich die Verteilungsfunktion $\varrho_m(t)$ der Wartezeit für den m -ten Anruf als der Er-

wartungswert von $s(t - \tau_m)$ ergibt. Wird die Verteilungsdichte der x_n gleich T^{-1} und die Verteilungsfunktion der t_n gleich $f(t_n)$ gesetzt, so ergibt sich die Verteilungsfunktion $\varrho(t)$ der Wartezeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Wartezeit für irgendeinen der n Anrufe $\leq t$ ist, als arithmetisches Mittel der $\varrho_m(t)$ zu

$$\frac{(n-1)!}{T^n} \sum_{m=1}^n \int_0^\infty df(t_1) \dots \int_0^\infty df(t_{n-1}) \int_0^T dx_1 \dots \int_{x_{n-1}}^T s(t - \tau_m) dx_n.$$

Bei Einführung von $s(T - x_n) s(t - \tau_m)$ an Stelle von $s(t - \tau_m)$ können hier die oberen Grenzen aller Integrale gleich ∞ gesetzt werden. Werden nun die Funktionen s durch ihre Integralausdrücke ersetzt, so ergeben sich mit Rücksicht auf die Eigenart der τ_m Integralausdrücke von solcher Gestalt, wie sie vom Verf. früher (siehe vorsteh. Referat) untersucht worden sind. Eine — noch immer ermüdende — Rechnung ergibt dann $\varrho(t)$ als ein dreifaches komplexes Integral, dessen Integrand durch Auflösung von l linearen, inhomogenen, singulären Integralgleichungen bestimmt werden kann. — Wird noch der Umstand in Betracht gezogen, daß jeder Anruf während einer nach gegebenem Gesetz verteilten Orientierungsperiode θ alle freien Leitungen blockiert, so läßt sich die Berechnung von $\varrho(t)$ ebenfalls auf die Auflösung von Integralgleichungen zurückführen. Diesmal treten aber neben einfachen Integralen auch zweifache auf. — Es wird auch gezeigt, wie die Verteilungsfunktion mehrerer Veränderlichen bestimmt werden kann. Und zwar am Beispiel der Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einer Gruppe von l Leitungen ohne Blockade die Wartezeit für den m -ten bzw. $m-j$ -ten Anruf nicht größer als t_1 bzw. t_2 ist. — Schließlich zeigt Verf., wie die Integralgleichungen bei der Verteilungsfunktion $f(t) = 1 - e^{-t}$ der Sprechdauer und bei irgendeiner Verteilungsfunktion $g(\theta)$ der Orientierungsperiode gelöst werden können. — Eine nächste Veröffentlichung soll Fernsprechersysteme ohne Anrufsammler behandeln. *Szentmártony* (Budapest).

Borel, Émile: Le paradoxe de Saint-Petersbourg. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 404—405 (1949).

Es wird mit geringer Modifikation eine Erweiterung des Petersburger Problems angedeutet. Sie kann nach leichter, in die Verhältnisse besseren Einblick bietender Verallgemeinerung folgendermaßen geschildert werden. Ein Glücksspiel zeige die Alternative A — nicht A mit der Wahrscheinlichkeit p bzw. $1 - p$. Es sei einem Spieler gestattet, solange auf A — und zwar beim k -ten Spiel $(k+1) 2^{k-1}$ Einheiten — zu setzen, bis A erscheint. Beim Eintreffen von A falle ihm eine seinem letzten Einsatz gleiche Summe als Gewinn zu. Neben der schrittweisen Verdoppelung seines ersten Einsatzes setzt also der Spieler auch seinen jeweiligen Gesamtverlust ein. Erscheint so A erst beim k -ten Spiel, dann beträgt sein Reingewinn

$$(k+1) 2^{k-1} - (k-1) 2^{k-1} = 2^k$$

Einheiten. Da die Wahrscheinlichkeit dafür $p(1-p)^{k-1}$ ist, ergibt sich als Erwartungswert seiner möglichen Gewinne $\sum 2p[2(1-p)]^{k-1}$. Diese Summe ist 1. bei $p = 1/2$, d. h. (im Endlichen) gerechtem Spiel (auf „gerad oder ungerad“ beim Roulettespiel ohne Beachtung des Erscheinens von Null) und (theoretisch) unbeschränktem Spiel nach Art der beim Petersburger Problem auftretenden Summe divergent; 2. bei $p < 1/2$, also falls Null zugunsten des Bankhaltenden gerechnet wird, noch stärker divergent; 3. bei $p > 1/2$, also falls Null zugunsten des Spielers erscheint, konvergent. Das anscheinend widersinnige Verhalten des „Erwartungswertes“ des Gewinns (selbst im Falle der Konvergenz) erklärt sich — wie beim Petersburger Problem — durch die unerlaubte Verallgemeinerung vom Endlichen auf das hier nicht nur praktisch — wie Verf. betont — sondern — wie Ref. findet — selbst theoretisch sinnlose Unendliche. *Szentmártony* (Budapest).

Borel, Émile: Sur une propriété singulière de la limite d'une espérance mathématique. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 429—431 (1949).

Verf. kehrt zu einem früher behandelten [vgl. vorsteh. Referat], dem Petersburger im wesentlichen äquivalenten Problem zurück. A und B spielen auf „gerad oder ungerad“, die sich mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ zeigen. A setzt beim k -ten Spiel $(k+1)2^{k-1}$ Einheiten, „solange eine gerade Zahl erscheint“. Wird die obere Grenze der Zahl der Spiele mit n festgesetzt, dann ist das Spiel gerecht. Gewinnt nämlich A erst das k -te Spiel, wofür die Wahrscheinlichkeit $1/2^k$ besteht, dann ist sein Reingewinn 2^k und so der Erwartungswert des Gewinns in n Spielen

$$E_n = 1 + \dots + 1 = n.$$

B kann nur dann gewinnen, wenn er alle n Spiele gewinnt. Da die Wahrscheinlichkeit hierfür $1/2^n$ und der Gewinn dabei $n2^n$ ist, berechnet sich dessen Erwartungswert ebenfalls zu $E'_n = (1/2^n)(n2^n) = n$. Somit ist in der Tat $E_n - E'_n = E'_n - E_n = 0$. Kann man nun bei (natürlich höchst theoretischem) $n \rightarrow \infty$ aus $\lim (E_n - E'_n) = 0$ auf gerechtes Spiel schließen? Nach Verf. nicht, weil „nach der Spielregel“ B nur bei Abbruch des Spieles gewinnen kann. Um dies mit den „Erwartungswerten“ in Einklang zu bringen, stellt sich Verf. auf den Standpunkt, daß gegenüber $E_\infty = \lim E_n = \infty$ der wahre Wert von $E'_\infty = 0$ zu setzen ist. „On n'a pas le droit d'employer les méthodes usuelles de l'algèbre, en raison de la signification du terme qui devient nul et qui représente une probabilité. Si cette probabilité est rigoureusement nulle, l'événement favorable est impossible et par suite l'espérance mathématique est nulle quelle que soit l'énormité ou même l'infinitude du gain hypothétique.“ Ref. findet eine solche Konvention befremdend und neigt dazu, die Spielregel bei nichtabbrechendem Spiel für unsinnig zu betrachten.

Szentmártony (Budapest).

Consael, R.: Sur une généralisation du processus de Pólya. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 34, 863—876 (1948).

Verf. schließt seine Untersuchung über stochastische Prozesse methodisch und inhaltlich eng an eine Abhandlung von D. G. Kendall (dies. Zbl. 32, 176) an. Der wichtigste Fall eines solchen Prozesses besteht darin, daß eine im Laufe der Zeit t zufallsartig schwankende ganzzahlige Größe $n = n(t)$ im Zeitpunkt t pro Zeiteinheit mit der Wahrscheinlichkeit $\nu + n\lambda$ bzw. $n\mu$ bzw. $1 - \nu - n(\lambda + \mu)$ um 1 zunimmt, bzw. um 1 abnimmt bzw. konstant bleibt, wobei ν, μ und λ Funktionen der Zeit t sind und $n(0) = 0$ angenommen wird. Für die Wahrscheinlichkeit $P_n(t)$, daß die zufällige Größe im Zeitpunkt t den Wert n aufweist, ergibt die hier übliche kontinuierliche Betrachtung eine Differenzen-Differentialgleichung, welche in eine für die erzeugende Funktion der P_n gültige partielle Differentialgleichung verwandelt wird. Verf. behandelt einen integrierbaren Fall $\nu/\lambda = K$, $\mu/\lambda = L$ (konstant), und die Durchrechnung ergibt:

$$P_n = W^{-K} \left(1 - \frac{1}{W}\right)^n \frac{\Gamma(n+K)}{\Gamma(n+1)\Gamma(K)}, \quad \text{wobei} \quad W = e^{-\varrho} \left[1 + \int_0^t \mu e^{\varrho\tau} d\tau\right],$$

$\varrho = \int_0^t (\mu - \lambda) d\tau$ ist. Für $\nu = 0$ liegt der von D. G. Kendall behandelte Fall vor.

Ist $\mu = 0$, $\lambda = b/(1+bt)$ ($b > 0$), so ergibt sich ein von G. Pólya aufgestelltes Gesetz, das für $b \rightarrow 0$ in das Poissonsche übergeht. *H. Hadwiger* (Bern).

Statistik:

Letestu, S.: Note sur l'analyse discriminatoire. Experientia, Basel 4, 22—23 (1948).

Es ist oft nicht möglich, die Individuen einer Beobachtungsmasse mit Hilfe eines einzigen Merkmals zweifelsfrei zu unterscheiden und zu klassifizieren. Verf. beschreibt eine analytische Methode, die es ermöglicht, dafür gleichzeitig mehrere Merkmale in Betracht zu ziehen, und zeigt, daß die entwickelte Formel immer eine Lösung hat.

Paul Lorenz (Berlin).

Oberg, E. N.: Approximate formulas for the radii of circles which include a specified fraction of a normal bivariate distribution. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. 18, 442—447 (1947).

Es wird der Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit

$$p = \iint_R (1/2\pi \sigma_x \sigma_y) e^{-(x^2/2\sigma_x^2 + y^2/2\sigma_y^2)} dx dy$$

und dem Radius R des im Nullpunkt zentrierten Kreises untersucht, der den Integrationsbereich für dieses Fehlerintegral darstellt. Verf. vergleicht die drei Näherungsformeln für R

$$R_1 = \{2\sigma_x \sigma_y \ln(1/[1-p])\}^{\frac{1}{2}}, \quad R_2 = \{[\sigma_x^2 + \sigma_y^2] \ln(1/[1-p])\}^{\frac{1}{2}}, \\ R_3 = \{\sigma_x + \sigma_y\} \{\frac{1}{2} \ln(1/[1-p])\}^{\frac{1}{2}},$$

und diskutiert an Hand von Tabellen, welche dieser Formeln bei gegebenem σ_x/σ_y und p jeweils den Vorzug verdient.

Georg Friede (Göttingen).

Quenouille, M. H.: Approximate tests of correlation in time-series 3. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 45, 483—484 (1949).

Für die näherungsweise Verteilung des ersten Reihen-Korrelationskoeffizienten bei normaler Verteilung der zu vergleichenden Abweichungen wird im Anschluß an Veröffentlichungen von Dixon, Madow und Verf. ein Kriterium aufgestellt, das mit Hilfe der Verteilung von Student ausgewertet werden kann.

Paul Lorenz (Berlin).

Quenouille, M. H.: Some results in the testing of serial correlation coefficients. *Biometrika*, Cambridge 35, 261—267 (1948).

Verf. gestaltet eine von mehreren anderen Autoren unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen entwickelte Formel für die Verteilung des ersten Reihen-Korrelationskoeffizienten durch Substitutionen mit Hilfe von Hyperbelfunktionen um, zeigt, daß die substituierte Veränderliche näherungsweise normal verteilt ist, und bestimmt ihren Mittelwert und ihre Streuung. Dann bringt er mehrere Zahlenbeispiele für den Fall, daß die Fehler der Reihenwerte nicht normal verteilt sind. Die Beispiele 1 bis 5 sind konstruiert, das Beispiel 6 betrifft Luftdruckmessungen, das Beispiel 7 Weizenpreise. Obwohl die Ergebnisse keinen endgültigen Beweis darstellen, geben sie doch Anhaltspunkte dafür, daß die Reihenkorrelationskoeffizienten näherungsweise normal verteilt sind, wenn die Zahl der Beobachtungen hinreichend groß ist. Schließlich wird aus den Beispielen 2 und 3 noch gefolgert, daß die effektive Zahl der Freiheitsgrade groß ist.

Paul Lorenz (Berlin).

Finney, D. J.: On a method of estimating frequencies. *Biometrika*, Cambridge 36, 233—234 (1949).

In Ergänzung der Untersuchungen von Haldane [*Biometrika*, Cambridge 33, 222—225 (1945)] über die Schätzung der Häufigkeit p des Auftretens einer bestimmten Eigenschaft aus Stichproben, deren Erhebung so lange fortgesetzt worden ist, bis die zu betrachtende Eigenschaft eine bestimmte Anzahl von Malen in Erscheinung trat („inverse binomial sampling“), enthält die vorliegende Note im wesentlichen die Entwicklung eines Ausdruckes für die gerechte („unbiased“) Schätzung der Streuung des Ausdruckes $x = (m-1)/(n-1)$, den Haldane als Schätzwert für p erhält. Unter n ist dabei der Umfang der Stichprobe verstanden, und m ist die Anzahl der Fälle, in denen die untersuchte Eigenschaft beobachtet wird. Als gerechter Schätzwert der Streuung wird gefunden $s^2 = x(1-x)/(n-2)$, während der seinerzeit von Haldane dafür angegebene Ausdruck $x^2(1-x)/(m-2)$ sich als nicht frei von „bias“ zeigt.

G. Wünsche (München).

Geometrie.

Elementargeometrie:

Thébault, Victor: Recreational geometry. Scripta math., New York 15, 149—155 (1949).

Wenn man die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks auf alle möglichen Arten verbindet, so entstehen 59 neue Sechsecke. Diese gehören 11 verschiedenen Typen an. Nur 46 der 60 Pascalgeraden der 60 Sechsecke sind untereinander verschieden. Verf. konstruiert für jeden der 12 Typen das Fußpunktsechseck für einen Punkt des Umkreises und gibt Eigenschaften dieser Fußpunktsechsecke an. Zacharias.

Cebrian, F.: Über die Methode von Hagge für die Rektifikation des Kreises allein mit dem Zirkel. Euclides, Madrid 9, 223—225 (1949) [Spanisch].

In Rev. mat. Hisp.-Amer. 3, 284 (1913—1914) ist ohne Begründung die folgende von K. Hagge herrührende Näherungsrektifikation des Kreises mit dem Zirkel allein angegeben worden: A sei der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises. Man zeichne um einen Punkt B seiner Peripherie den Kreis mit dem Radius r , der den gegebenen in D und E schneidet. Der Kreis um D mit DE schneidet den ersten Kreis in C , den zweiten in C' . Die Kreise um C und C' mit $2r$ schneiden sich in F und F' . Die Kreise um F und F' mit DE als Radius schneiden sich in G und H . Die Kreise um D und E mit $2r$ schneiden sich in I und K (I und G auf derselben Seite von DE). Der Kreis um F mit IG schneide die Kreise $A(r)$ und $B(r)$ in M und N . Man bestimme die Mitte L des außerhalb der Kreise $A(r)$ und $B(r)$ gelegenen Bogens jenes Kreises um F (Enriques, Fragen der Elementargeometrie II, Leipzig 1907, 34) und die Mitte J des Bogens IK des Kreises $E(2r)$. Dann ist JL annähernd gleich dem halben Umfang des gegebenen Kreises. Verf. gibt die fehlende Begründung des Verfahrens und vergleicht es hinsichtlich der Genauigkeit und Einfachheit mit der klassischen Konstruktion von Mascheroni in seiner Geometria del compasso (1797). Bei Hagge ist $JL = 3,1415919 r$, der Fehler ist also kleiner als 0,0000008; bei Mascheroni ist er etwas größer als 0,001. Dafür ist die Mascheronische Konstruktion aber einfacher. Zacharias (Quedlinburg).

Buerger, M. J.: Crystallographic symmetry in reciprocal space. Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 198—201 (1949).

Folgende drei Theoreme über die Beziehungen zwischen den Symmetrieelementen eines Kristallraumes und seines reziproken Raumes werden abgeleitet: 1. Enthält ein Kristallraum ein Symmetrieelement, welches durch einen bestimmt gewählten Nullpunkt geht, so weist sein reziproker Raum das isomorphe (translationsfreie) Symmetrieelement durch den Nullpunkt auf; aber die Punkte in den Feldern, welche durch die Operationen des Symmetrieelementes miteinander verknüpft sind, besitzen Phasen, welche sich um $e^{2\pi i p h/q}$ unterscheiden, wobei p die Potenz der Operation, welche die Felder verknüpft, ist und a/q die Translationskomponente der Operation darstellt ($F_{h'k'l'} = F_{hkl} \cdot e^{2\pi i h/a}$). — 2. Wird ein Symmetrieelement um den Betrag $xa + yb$ verschoben, so ist die Differenz der Phasenkomponente für F_{hkl} , welche diese Verschiebung begleitet, gleich $e^{2\pi i (xh + yk)}$. — 3. Für jede erzeugende Operation der Zelle einer Raumgruppe existiert eine Symmetriebeziehung zwischen Punkten des reziproken Gitters: die Symmetrie hinsichtlich Lage und absoluter Größe ist dieselbe wie diejenige der mit der Raumgruppe isomorphen Punktgruppe, wobei nicht-verschwindende Werte nur an den Gitterpunkten des zum ursprünglichen Gitter reziproken Gitters auftreten, während die Phasen der Punkte, welche durch diese Symmetrie verknüpft sind, durch die Translationskomponenten und Lagen der Symmetrieelemente, ebenso wie durch die Indizes der Punkte (gemäß Theorem 1 und 2) bestimmt werden. W. Nowacki (Bern).

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Lorent, H.: Surfaces algébriquement associées aux quadriques réglées. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 245—252 (1948).

Si tratta, in sostanza, di un gruppo di esercizi di geometria analitica, dei quali l'A. non mette in luce il legame proiettivo unitario — che vale a chiarirli rapidamente — soffermandosi invece a rilevare i molteplici risultati particolari che nascono da talune specializzazioni metriche delle ipotesi e dalla scelta della rappresentazione. — Il problema è il seguente: data una certa corrispondenza algebrica, T , di indici m ed n , fra due fasci di piani, determinare la superficie, S , luogo delle rette comuni ai piani omologhi. È ben noto che la S ha l'ordine $m + n$, e le sue diverse caratteristiche sono dovute alle circostanze che presenta la T . — Nel § I l'A. imposta analiticamente le sue ricerche scrivendo le equazioni degli assi, h e k , dei fasci dati come quelle di due generatrici sghembe di un iperboloide rigato, riferito ai propri assi di simmetria ortogonale. Poi comincia con l'ipotesi che la T sia una proiettività con una coppia di piani corrispondenti paralleli; e successivamente passa ad alcuni tipi di corrispondenze (1, 2), (2, 2), (2, 3), ecc. — Nel § II gli assi h e k sono supposti paralleli e della S , che è un cilindro (dal quale talora si stacca più volte il piano all'infinito), si studiano le sezioni piane, sempre per particolari trasformazioni T . — Nel § III la h e la k si riguardano come generatrici, rispettivamente, di un iperboloide ad una falda e di un paraboloide iperbolico, distinguendo i due casi in cui la k è propria o impropria. Campedelli (Firenze).

Dorwart, H. L.: A normal form for the equation of the straight line in space. Scripta math., New York 14, 181—185 (1948).

L'A., limitandosi alla geometria analitica del campo reale, propone che nello spazio una retta (reale), r , riguardata come insieme dei suoi punti reali, si rappresenti mediante l'equazione complessiva, $f = 0$, di due piani immaginari coniugati passanti per essa. Prende due piani particolari, α e β , e scrive la $f = 0$ in una forma opportuna che chiama equazione normale della r . L'interesse della cosa starebbe soprattutto nel fatto che il valore assunto dal polinomio f in un punto, P , dello spazio dà la distanza di P dalla r : di qui, per analogia con le rette del piano e i piani dello spazio, il nome scelto per la $f = 0$. — Il § 3, dedicato alla riduzione dell'equazione della r alla forma normale, non sembra presentare il necessario grado di generalità. — Manca nella trattazione una facile avvertenza che vale a chiarirne rapidamente tutti gli aspetti: non vi è fatto notare che i piani α e β , scelti dall'A., sono quelli passanti per la r e tangenti al „cerchio assoluto“ dello spazio. Se π è il piano normale alla r in un suo punto M , i piani α e β costituiscono il luogo dei punti equidistanti da M e da π , e la r (contata due volte) ne è l'unica parte reale. — Detto R il punto improprio della r , l'equazione normale $f = 0$ si può scrivere in modo da mettere in evidenza che essa rappresenta la quadrica passante per R nel fascio individuato dal „cono isotropo“, Φ , con il vertice in M , e dal piano polare di R rispetto a Φ , contato due volte. Allora il valore assoluto del polinomio f in un punto P appare senz'altro dato dalla lunghezza di un cateto del triangolo rettangolo con l'ipotenusa PM e l'altro cateto compreso fra P e il piede della normale condotta da P a π . Si tratta quindi effettivamente della distanza di P dalla r . — L'A., proseguendo nello stesso ordine di idee, termina con il suggerimento di rappresentare l'insieme dei punti reali di un cerchio mediante l'equazione complessiva di due sfere immaginarie coniugate passanti per esso, della quale si considerino le sole soluzioni reali. Campedelli (Firenze).

Biarge, Julio Fernandez: Endliche, zyklische Staudtsche Projektivitäten. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 226—238 (1948) [Spanisch].

Eine Staudtsche Projektivität heißt bekanntlich zyklisch von der Ordnung s , wenn ihre s -te Potenz mit der Identität zusammenfällt. In der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich der Verf. mit der Bestimmung aller Staudtschen Projektivitäten, die zyklisch von einer gegebenen endlichen Ordnung sind und auf Gebilden erster Stufe desselben Trägers mit einem Fundamentalkörper von der Charakteristik Null liegen. Zu dem Zweck betrachtet er eine Normalform solcher Projektivitäten und untersucht, für welche ihrer Fundamentalkörper, Automorphismen und Parameterwerte sie zyklisch von der gegebenen Ordnung werden. Auf diese Weise wird das Problem zurückgeführt auf die Bestimmung der Teilmannigfaltigkeiten, die inva-

riant bleiben, wenn man eine passend konstruierte Mannigfaltigkeit in bestimmter Weise in sich selbst transformiert. In vielen Fällen ist dieses Problem leicht lösbar; es führt zu Ergebnissen, die für die Lösung des ersten verwertbar sind. Es gelingt dem Verf. auf diese Weise, das Erzeugungsgesetz für jede zyklische Projektivität einer „reduzierten“ Ordnung s und einer bestimmten reduzierten Form aufzustellen.

E. Löffler (Stuttgart).

Aballenas, Pedro: Zerlegungen, die durch eine Kollineation im P_k^n erzeugt werden.
Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 261—276 (1948) [Spanisch].

Es sei P_k^n ein projektiver Raum von der Dimension n auf einem beliebigen Grundkörper K und φ eine gewöhnliche, durch ihre Gleichungen bestimmte Kollineation desselben. Der Verf. bezeichnet als invariante Mannigfaltigkeit jede lineare Mannigfaltigkeit von P_k^n , die mittels φ in sich selbst transformiert wird. Jede invariante Mannigfaltigkeit, die keine invariante Teilmannigfaltigkeit enthält, heißt Primmannigfaltigkeit. Jede invariante Mannigfaltigkeit, die eine einzige „Teilmannigfaltigkeit mit Primcharakter“ enthält, heißt irreduzibel. Alle nicht irreduziblen Mannigfaltigkeiten heißen reduzibel. Man sagt, der Raum P_k^n lasse die Zerlegung $P_k^n = F_1 + \dots + F_r$ zu, wenn diese Komponenten invariant sind, wenn P_k^n die Vereinigung aller dieser Komponenten darstellt und wenn die aus einer beliebigen Anzahl dieser Komponenten bestehende Mannigfaltigkeit mit der aus den übrigen bestehenden keinen Punkt gemeinsam hat. Eine Zerlegung ist kanonisch, wenn alle ihre Komponenten irreduzibel sind. Mit Hilfe der Theorie der ähnlichen Matrizen ergibt sich, daß eine in einem projektiven Raum P_k^n gegebene Kollineation eine kanonische Zerlegung desselben erzeugt, vorausgesetzt, daß er reduzibel ist. Vom geometrischen Standpunkt aus interessiert die Frage, ob es nur eine oder mehrere kanonische Zerlegungen gibt. Für den Fall, daß K der Körper der komplexen Zahlen ist, hat St. Cohn-Vossen die Frage untersucht [Math. Ann., Berlin 115, 80—86 (1937); dies. Zbl. 17, 220]. Verf. betrachtet den allgemeinen Fall eines beliebigen Körpers und stellt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, daß eine Kollineation von P_k^n eine einzige kanonische Zerlegung erzeugt. Daneben werden noch einige Sätze über die Reduzibilität und die Irreduzibilität von Matrizen gewonnen.

E. Löffler (Stuttgart).

G.-Rodeja, F. E.: Verallgemeinerung des Pascalschen Satzes auf Hyperräume.
Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 23—45 (1948) [Spanisch].

Einleitend gibt Verf. einen Überblick über die Beweise und Erweiterungen des Pascalschen Satzes und seines dualen Gegenstücks, des Satzes von Brianchon. Er betrachtet sodann als Verallgemeinerung der ebenen Kurve zweiter Ordnung im R_n die rationale Normkurve dieses Raumes und formuliert die folgende Verallgemeinerung des Pascalschen Satzes: „Gegeben seien $n + 1$ Punktepaaire $P_1, P_{n+2}, P_2, P_{n+3}, \dots, P_{n+1}, P_{2n+2}$ auf einer rationalen Normkurve C_n^n . Legt man durch je n dieser Punkte, die in der durch ihre Indizes bestimmten zyklischen Permutation aufeinander folgen, die Hyperebene und bringt sie jeweils zum Schnitt mit derjenigen Hyperebene, die durch die paarweise entsprechenden n Punkte bestimmt ist, so sind die $n + 1$ Schnitträume R_{n-2} , die durch diese $n + 1$ Paare von Hyperebenen erzeugt werden, assoziiert“. Dabei werden, in Erweiterung einer von L. Schläfli [J. reine angew. Math. 65, 189—197 (1866)] gegebenen Definition, v Räume R_k des R_n als assoziiert bezeichnet, wenn ihre Bildpunkte auf der entsprechenden Graßmannschen Mannigfaltigkeit mit den Indizes (n, k) einem Raum angehören, dessen Dimension $\leq v - 2$ ist. Für $n = 2$ ergibt sich der Pascalsche Satz. Für $n = 3$ erhält man den Satz von Chasles: „Wählt man auf der kubischen Raumkurve 4 Punktepaaire $P_1, P_5; P_2, P_6; P_3, P_7; P_4, P_8$ und bringt man jede der 4 Ebenen $P_1 P_2 P_3, P_2 P_3 P_4, P_3 P_4 P_5, P_4 P_5 P_6$ zum Schnitt mit der Ebene, die durch die paarweise zugeordneten 3 Punkte bestimmt ist, so gehören die 4 Schnitt-

geraden zu demselben System von Erzeugenden einer Regelfläche zweiter Ordnung (sie sind assoziiert)“. Die Beweise für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ werden mit algebraisch-geometrischen Hilfsmitteln geführt. Der Beweis des allgemeinen Falles für die C_n^n gelingt nach derselben Methode mit Hilfe eines algebraischen und eines kombinatorischen Hilfssatzes. Der Beweis des dualen Satzes, der das Analogon zum Satz von Brianchon darstellt, ergibt sich ohne weiteres mit Hilfe der durch die rationale Normkurve C_n^n definierten Polarität des R_n . E. Löffler (Stuttgart).

Algebraische Geometrie:

Chow, Wei-Liang: Über die Lösbarkeit gewisser algebraischer Gleichungssysteme. Comment. math. Helvetici **23**, 76—79 (1949).

In Verallgemeinerung eines Satzes von W. Habicht beweist der Verf. folgenden Satz: K sei ein Körper; V sei eine $(n-1)$ -dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit im m -dimensionalen projektiven Raum S_m ; $f_1(x), \dots, f_n(x)$ bzw. $g_1(x), \dots, g_n(x)$ seien Formen h -ten bzw. k -ten Grades aus dem Ringe $K[x_1, \dots, x_{m+1}]$; zwischen ihnen bestehe die Relation

$$\sum_{i=1}^n f_i(\xi) g_i(\xi) = 0 \quad \text{für jeden Punkt } (\xi) \text{ in } V; \text{ es seien nicht gleichzeitig } n \text{ gerade und } h = k.$$

Dann besitzen entweder die Hyperflächen $f_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) oder die Hyperflächen $g_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) einen gemeinsamen Schnittpunkt in K mit der Mannigfaltigkeit V . — Zum Beweis genügt es, sich auf irreduzible V zu beschränken. Vorausgesetzt sei, daß V und die n Hyperflächen $g_i(x) = 0$ einander nicht schneiden. — $F_1(u^1, x), \dots, F_n(u^n, x)$ seien Formen vom Grade h mit unbestimmten Koeffizienten, aus denen die vorgegebenen $f_i(x) = F_i(\alpha^i, x)$ durch die Spezialisierung $(u^1, \dots, u^n) \rightarrow (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ hervorgehen. a) Aus den $g_i(x)$ kann man verhältnismäßig einfach n Formen $F_i(\beta^i, x)$, $i = 1, \dots, n$, konstruieren, für die die Relation

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n F_i(\beta^i, \xi) g_i(\xi) = 0 \quad \text{für alle } (\xi) \in V$$

erfüllt ist und von denen die $n-1$ ersten Formen $n-1$ Hyperflächen im S_m definieren, die mit der $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit V einen gemeinsamen isolierten Schnittpunkt (ζ) besitzen, für den außerdem $g_n(\zeta) \neq 0$ gilt. Dann folgt aus (1), daß (ζ) auch in der n -ten Hyperfläche $F_n(\beta^n, x) = 0$ liegt. Für diese $F(\beta^i, x)$ an Stelle der $f_i(x)$ trifft also der Satz zu. — b) Natürlich brauchen diese $F_i(\beta^i, x)$ nicht gleich den vorgegebenen $f_i(x) = F_i(\alpha^i, x)$ zu sein, sind aber zum Beweis des Satzes für die vorgegebenen $f_i(x)$ verwendbar. — R_N sei nämlich der affine Raum, in dem die Koordinaten eines Punktes die hintereinander geschriebenen Koeffizienten des n -tupels von Formen (F_1, \dots, F_n) sind. Bei dieser Abbildung der n -tupel von Hyperflächen (F_1, \dots, F_n) auf den R_N entsprechen denjenigen n -tupeln von Hyperflächen, für die (1) gilt, die Punkte einer linearen Mannigfaltigkeit $L \subset R_N$. Der Punkt $(\alpha^1, \dots, \alpha^n) \in R_N$ sei allgemeiner Punkt von L . Nach Beweis des Satzes für die $F_i(\alpha^i, x)$, $i = 1, \dots, n$, folgt seine Richtigkeit auch für die vorgegebenen $f_i(x) = F_i(\alpha^i, x)$, weil sich $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ aus $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ durch relationstreue Spezialisierung erhalten läßt. — Daß nun die $n-1$ ersten allgemeinen und völlig unabhängigen Hyperflächen $F_j(u^j, x) = 0$, $j = 1, \dots, n-1$, und die $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit V Schnittpunkte $(\eta^1), \dots, (\eta^s)$ in S_m gemeinsam haben, ist klar. Bei der Spezialisierung $(u^1, \dots, u^n) \rightarrow (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ mögen $(\eta^1), \dots, (\eta^s)$ in die Punkte $(\eta^1), \dots, (\eta^s)$ aus S_m übergehen, die natürlich Schnittpunkte von V mit den $n-1$ Hyperebenen $F_j(\alpha^j, x) = 0$ sind. Hierbei muß aber für mindestens einen Schnittpunkt, etwa für (η^1) , $g_n(\eta^1) \neq 0$ sein, denn der in a) aufgetretene Punkt $(\zeta) \in S_m$ muß sich aus einem der η^r bei der relationstreuen Spezialisierung $(\alpha^1, \dots, \alpha^{n-1}) \rightarrow (\beta^1, \dots, \beta^{n-1})$ ergeben, für (ζ) aber gilt nach a) $g_n(\zeta) \neq 0$.

Dann folgt aus $g_n(\eta^1) \neq 0$ und der Relation $\sum_{i=1}^n F_i(\alpha^i, \eta^1) g_i(\eta^1) = 0$, daß für dieses $(\eta^1) \in V$ neben $F_j(\alpha^j, \eta^1) = 0$, $j = 1, \dots, n-1$, auch $F_n(\alpha^n, \eta^1) = 0$ gilt, q. e. d. E.-A. Behrens.

Jongmans, F. et L. Nolle: La classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre quatre. Ann. Sci. École norm. sup., III. S. **65**, 139—188 (1948).

La détermination de ces systèmes est faite de façon très minutieuse et très complète en donnant pour chacun d'eux l'ordre minimum, la multiplicité des points bases, la discussion de leur existence, souvent leur construction effective, les caractères invariants de leurs adjoints. Le premier chapitre classe les systèmes $|C|$ de dimension positive ou nulle avec adjoint $|C_1|$ irréductible, simple, et de genre $p_1 < 4$; il reprend en les complétant des résultats antérieurs de F. Jongmans

[Les variétés algébriques à courbes sections de genre 4, Acad. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8° II. S. (1944)]. Le deuxième chapitre s'occupe des systèmes infinis avec adjoint $|C_1|$ non simple et de genre $p_1 < 4$ et le troisième des systèmes $|C|$ de dimension 3 avec adjoint de genre $p_1 \geq 4$. Dans ces deux derniers chapitres les résultats d'un travail antérieur de L. Nolle sont souvent utilisés [Recherches sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes, Mém. Soc. Sci. Liège, IV. S. 7, 469—555 (1947)]. Les auteurs soulignent en cours de route (p. 164, p. 169) la présence d'un même système linéaire adjoint à plusieurs systèmes linéaires typiquement distincts; cette circonstance ne doit donc plus être considérée comme un pur accident.

L. Lesieur.

Orgeval, Bernard d': A propos des plans doubles de genres $p_a = p_g = 0$. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 975—976 (1949).

Besides the cases determined by Campedelli [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VI. S. 15, 359—362, 536—542 (1932); this Zbl. 4, 161, 363], the only possible non-rational double planes with $p_a = p_g = 0$, having a singularity which diminishes by 1 the genus, are those which would correspond to two types of branch curves of order 12, if such curves effectively exist. For the double planes one must have $p^{(1)} = P_2 = 3$ or 4.

G. Ancochea (Madrid).

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces irrégulières contenant un système linéaire isolé. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 196—199 (1948).

L'A. comincia con il ricordare che un sistema lineare, $|C|$, di genere $\pi \geq q$, tracciato sopra una superficie algebrica, F , d'irregolarità q , appartiene in generale ad un sistema continuo algebrico, $\{C\}$, costituito da ∞^q sistemi lineari. Egli avverte però che una superficie d'irregolarità q può tuttavia contenere dei sistemi continui formati da $\infty^{q'}$ sistemi lineari, con $q' < q$, ed anche dei sistemi lineari isolati. Un esempio di quest'ultima possibilità è dato dalla superficie, J , che rappresenta le coppie dei punti di una curva, C , del genere quattro. Invero la C contiene due serie lineari, g_3^1 , d'ordine tre e di dimensione uno, alle quali corrispondono sulla J due curve isolate di genere quattro, cioè due sistemi lineari isolati di dimensione zero. Si perviene ad una conclusione analoga ogni qual volta si considera la superficie che rappresenta le coppie dei punti d'una curva contenente una serie lineare d'ordine inferiore al genere. — Richiamate queste circostanze, l'A. dimostra che ad ogni superficie irregolare, F , (d'irregolarità $q > 1$) possedente un sistema isolato, $|C|$, (e priva di fasci irrazionali di curve), è associata una varietà del Picard, V , che, in generale, risulta tracciata sopra una varietà dello Jacobi (relativa ad una curva di $|C|$). — Più precisamente, qualora la V non presenti la circostanza generale ora detta, nasce l'uno o l'altro dei seguenti casi: la V contiene una congruenza lineare di varietà abeliane, birazionalmente equivalente ad una varietà tracciata sopra una varietà dello Jacobi; oppure sulla V esiste una involuzione la quale ha come immagine una varietà situata su quella dello Jacobi. — Giova osservare che la dimostrazione svolta non fa mai ricorso alla dimensione del sistema $|C|$. Su questo fatto l'A. si ripromette ulteriori indagini in un prossimo lavoro. *Campedelli*.

Godeaux, Lucien: Construction de surfaces algébriques de diviseur quelconque. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 220—224 (1948).

Sopra una superficie F , avente il divisore uguale all'unità, esista un'involuzione ciclica, I , dell'ordine p , priva di punti uniti. È dovuta all'A. (1914) l'osservazione che una superficie immagine della I ha il divisore uguale a p . Egli torna ora sull'argomento, mostrando — con la sua consueta padronanza dell'algoritmo algebrico — in qual modo si possa effettivamente costruire una superficie come la F , e dare poi l'immagine dell'involuzione I . Viene esaminato, in particolare, il caso $p = 5$.

Campedelli (Firenze).

Mandan, Sahib Ram: Segre's quartic locus. Bull. Calcutta math. Soc. 41, 140—142 (1949).

Verf. gibt eine elementare Behandlung der bekannten Segreschen Mannigfaltigkeit im 4-dimensionalen Raum. Die in Einzelheiten nicht immer klare Note bedeutet gegenüber Baker, *Principles of geometry*, Bd. IV, Kap. 5, keinen Fortschritt.

J. C. H. Gerretsen (Groningen).

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Bol, Gerrit: Streifen auf einer Fläche im dreidimensionalen Raum. *Arch. Math.*, Oberwolfach **1**, 371—376 (1949).

La geometria proiettiva differenziale delle striscie è stata fondata in un precedente lavoro dello stesso A [questo Zbl. **31**, 274]: vengono ora prese in esame questioni che si collegano all'appartenenza di una striscia ad una determinata superficie. Per quanto concerne le rigate che appartengono ad una striscia sono da considerare i casi in cui la curva-sostegno della striscia è curva flecnodale della rigata: se come tale è da contarsi doppiamente la striscia dicesi biflecnodale. L'A. considera poi una striscia del 2° ordine (comune a due superficie che hanno contatto del 2° ordine lungo un'intera curva) e fra l'altro caratterizza il caso in cui la curva-sostegno è una curva di Darboux: se essa è poi in pari tempo pangeodetica allora la striscia corrispondente è biflecnodale. L'A. considera infine le curve sestatiche di una superficie (tali che in ogni loro punto la sezione del piano osculatore con la superficie ha ivi un punto sestatico): la loro equazione differenziale consente di stabilire che per un dato punto e con data tangente passano due di tali curve con piani osculatori generalmente distinti. Per ogni punto della superficie vi sono però 12 direzioni consestatiche per le quali i due piani osculatori alle relative curve sestatiche coincidono. Si determinano così sulla superficie 12 schiere di curve consestatiche. L'A. afferma che solo per le superficie di Kummer le 12 direzioni sono sempre a coppie coniugate cosicchè le 12 schiere si riuniscono in 6 doppi sistemi coniugati.

P. Buzano (Torino).

Backes, Fernand: Sur certains couples de surfaces dont les tangentes asymptotiques se coupent inversement. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **228**, 49—51 (1949).

Es werden Flächenpaare (P_1) , (P_2) betrachtet, deren Punkte P_1 bzw. P_2 durch gleiche Parameterwerte u , v derart aufeinander bezogen sind, daß die Parameterlinien beider Flächen Asymptotenlinien sind und ihre Tangenten sich paarweise in Punkten P_3 , P_4 schneiden. [P_3 ist Schnittpunkt der Tangenten an die Kurven $(P_1)_u$ und $(P_2)_v$, P_4 ist Schnittpunkt der Tangenten von $(P_1)_v$, $(P_2)_u$]. Die Fokalebenen der Geraden $P_1 P_2$ gehen durch die Fokalpunkte der Geraden $P_3 P_4$. Auf der Geraden $P_1 P_2$ gibt es ∞^1 Punkte, die Flächen beschreiben, deren Tangentialebenen durch $P_3 P_4$ gehen. In den Strahlensystemen $(P_1 P_2)$ und $(P_3 P_4)$ entsprechen sich die Torsen. Verf. zeigt die Äquivalenz folgender 3 Eigenschaften: 1. Die Flächen (P_1) und (P_2) sind projektiv abwickelbar. 2. Die Gerade $P_1 P_2$ erzeugt ein W -Strahlensystem. 3. Die Schnittgerade der Tangentialebenen in P_1 und P_2 , also die Gerade $P_3 P_4$ durchläuft ein W -Strahlensystem. — Weiter werden noch die Existenzbedingungen solcher Flächenpaare und begleitenden Tetraeder sowie der Sonderfall, daß (P_1) und (P_2) Quadriken sind, behandelt.

H. R. Müller (Graz).

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Allendoerfer, Carl E.: Steiner's formulae on a general S^{n+1} . *Bull. Amer. math. Soc.* **54**, 128—135 (1948).

Es bezeichne W^n eine geschlossene, beschränkte n -dimensionale Hyperfläche eines vollständigen Riemannschen Raumes S^{n+1} konstanter Krümmung K . Die Hauptkrümmungen bezüglich einer äußeren Normalen sollen alle negativ sein. Verf. berechnet den Flächeninhalt A_ϱ der äußeren Parallelfläche W_ϱ^n im Abstand $\varrho \geq 0$ und das von W_ϱ^n eingeschlossene Volumen V_ϱ . — Die Definition der geodätischen

Parallellfläche W_ϱ^n basiert auf dem analytischen Gesetz, und diese ist von der mengen-geometrischen Parallellfläche i. a. verschieden. Die erstere kann mehrfach überdeckte Raumteile umschließen; bei der Volumberechnung werden diese Anteile mit der entsprechenden Vielfachheit berücksichtigt. — Die Formeln lauten:

$$A_\varrho = \sum_0^n M_i (\sin [V/K \varrho] / \sqrt{K})^{n-i} (\cos [V/K \varrho])^i; \quad V_\varrho = V_0 + \int_0^\varrho A_\tau d\tau.$$

Für $K > 0$ ist $0 \leq \varrho \leq \pi/2 \sqrt{K}$ und für $K \leq 0$ $\varrho \geq 0$ wählbar; im letzteren Fall werden die Formeln mit hyperbolischen Funktionen wieder reell schreibbar. Die M_i sind höhere über W^n erstreckte Krümmungsintegrale, die den Minkowskischen Quermaßintegralen bei konvexen Flächen im euklidischen Raum entsprechen. Durch die vom Verf. gemeinsam mit A. Weil [Trans. Amer. math. Soc. **53**, 101 bis 129 (1943)] entwickelten Gauß-Bonnetschen Formeln werden weitere interessante Gesichtspunkte ermöglicht; insbesondere wird für $K > 0$ eine Polarität weiter verfolgt. — Im sphärischen und hyperbolischen Raum wurden diese Zusammenhänge bereits von G. Herglotz [Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **15**, 165—177 (1943); dies. Zbl. **28**, 87] untersucht. Für $K = 0$ ergeben sich die geläufigen, nach J. Steiner und H. Minkowski benannten Parallelformeln für konvexe geschlossene Flächen im euklidischen Raum.

H. Hadwiger (Bern).

Morrey jr., Charles B.: The problem of Plateau on a Riemannian manifold. Ann. Math., Princeton, II. S. **49**, 807—851 (1948).

Dans cet important travail, l'A. démontre le théorème d'existence des surfaces du type k , solutions du problème de Plateau, dans le cas où l'espace euclidien ambiant est remplacé par une variété riemannienne de classe C' sur laquelle l'hypothèse suivante de „régularité homogène“ est faite: à la variété riemannienne V_N , on peut associer deux nombres positifs fixes m, M tels que tout point x_0 de V_N appartient à un ouvert de V_N qui peut être représenté sur l'hypercube unité ($|x^i| < 1$) par une représentation de classe C' qui amène x_0 sur l'origine et est telle que les $g_{\alpha\beta}(x)$ satisfassent aux inégalités $m \sum (\xi^\alpha)^2 \leq g_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \xi^\beta \leq M \sum (\xi^\alpha)^2$ quels que soient les ξ^α . Toute variété riemannienne compacte régulière admet cette propriété; il en est de même par un grand nombre de variétés non compactes (l'espace hyperbolique par exemple pour lequel Lonseth [Amer. J. Math. **64**, 229—259 (1942)] a étudié le problème de Plateau). — Par une méthode qui est une adaptation originale de celle de Courant [Ann. Math., Princeton, II. S. **38**, 679—724 (1937); ce Zbl. **17**, 268], l'A. établit qu'il existe une fonction à valeurs dans V_N , $x(u, v)$, de classe P_2'' , définie sur une région B limitée par k cercles, telle que $E = G$ et $F = 0$ presque partout et que la surface $x = x(u, v)$ est une surface de moindre aire de Lebesgue de type k limitée par les contours donnés. Si V_N est suffisamment différentiable, l'A. établit à l'aide de résultats antérieurs [Univ. California, Publ. Math. **1**, 1—130 (1943)] que la surface précédente est de classe C'' et est une surface minima au sens de la géométrie différentielle. Le papier est divisé en trois chapitres: le chapitre I contient un exposé précis des notions utilisées concernant les courbes et surfaces d'une variété riemannienne; en particulier il comporte la définition de l'aire de Lebesgue d'une surface plongée dans une variété riemannienne. Un théorème important concernant les représentations ε -conformes, déjà utilisées par Rado [Math. Z. **32**, 763—796 (1930)] y est établi dans toute sa généralité. Le chapitre II étudie en détail les fonctions à valeurs vectorielles de classes P_α et P'_α qui servent d'instruments essentiels pour l'adaptation des lemmes de Courant. Le chapitre III contient l'analogue des lemmes de Courant et établit le théorème d'existence. Un rapprochement avec les fonctions harmoniques sur une variété riemannienne différentielle telles qu'elles ont été étudiées par Bochner [Trans. Amer. math. Soc. **47**, 146—154 (1940); ce Zbl. **22**, 397] est indiqué.

Lichnerowicz (Paris).

Ortiz Fornaguera, R.: Über die Translation von Punkten in Räumen von affinem Zusammenhang. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 174—191 (1948) [Spanisch].

Ce papier consiste essentiellement en un exposé didactique de la géométrie différentielle des espaces à connexion affine envisagée au point de vue de Elie Cartan. Il ne contient pas de résultats nouveaux, mais présente une étude claire des rapports entre la théorie du parallélisme et l'intégration des systèmes différentiels linéaires; ceci est relié avec la méthode géométrique des images tangentielles. *Lichnerowicz* (Paris).

Hlavatý, V.: Affine embedding theory I: Affine normal spaces. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **52**, 505—517 (1949).

In einem A_n (affinzusammenhängender Raum mit symmetrischer Übertragung $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$) wird eine durch $\xi^\nu = \xi^\nu(y^1, \dots, y^m)$ bestimmte Untermannigfaltigkeit X_m betrachtet. Aus dem Vektor $T_a^\nu = \partial \xi^\nu / \partial y^a$ des A_n kann eine Reihe weiterer Vektoren des A_n durch schrittweise Bildung von „höheren Ableitungen“ nach den y^a gebildet werden. Diese Ableitungen werden aus T_a^ν durch sukzessive Anwendung des Operators $\nabla_a \equiv T_a^\mu \nabla_\mu$ (∇_μ kovariante Ableitung bezüglich $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$) gebildet. Man erhält so im A_n die Vektoren $T_{a_1}^\nu, T_{a_1 a_2}^\nu, \dots$. Nach N Schritten dieser Art wird man so nur linear abhängige Vektoren erhalten. Es muß daher

$$T_{a_{N+1} \dots a_1}^\nu - \sum \Phi_{a_{N+1} \dots a_1}^{b_1 \dots b_N} T_{b_1 \dots b_N}^\nu = 0$$

sein. Sind sämtliche bei den einzelnen Schritten erhaltene Vektoren voneinander unabhängig, so sind die Φ eindeutig bestimmt. Andernfalls betrachtet Verf. diese Gleichungen als ein von vornherein gegebenes System partieller Differentialgleichungen mit eindeutig vorgegebenen Koeffizienten Φ . Diese Gleichungen können als ein System von Ableitungsgleichungen betrachtet werden, und daher wird ihren Koeffizienten eine geometrische Bedeutung zukommen. In der Tat kann Verf. mit Hilfe der Φ eine symmetrische Übertragung Γ_{bc}^a definieren, die die X_m zu einer A_m macht. Außer der so erhaltenen Übertragung konstruiert Verf. auch eine solche höherer Ordnung. Dieselbe kann aus Ansätzen bestimmt werden, deren Typus durch diejenigen Gleichungen bestimmt ist, die man durch fortgesetzte Ableitung der Transformationsgleichungen der Γ_{bc}^a erhält. Vermöge der Γ_{bc}^a kann Verf. für die $T_{a_1}^\nu$ eine kovariante Ableitung $\Delta_{a_x} T_{a_1}^\nu$ bzw. höhere mit $\Delta_{a_x} \dots \Delta_{a_1} T_{a_1}^\nu$ bezeichnete kovariante Ableitungen definieren. In bezug auf den oberen Index bestimmen diese Größen Vektoren. Die durch $\Delta_{a_x} \dots \Delta_{a_1} T_{a_1}^\nu$ bestimmten Vektoren bestimmen genau den $(x-1)$ -ten affinen Normalraum des A_n . *O. Varga* (Debrecen).

Vagner (Wagner), V.: Geometrische Theorie der einfachsten n -dimensionalen singulären Aufgabe der Variationsrechnung. Mat. Sbornik, n. S. **21**, 321—364 (1947) [Russisch].

Ein Variationsproblem $s - \int L(\xi^\alpha, \dot{\xi}^\alpha) dt = \text{Extr.}$ heißt singulär von der Singularitätsklasse r , wenn die Matrix $\partial^2 L / \partial \dot{\xi}^\alpha \partial \dot{\xi}^\beta$ den Rang $n-1-r$ hat. Die Indikatrix $L(\xi^\alpha, x^\alpha) = 1$ setzt sich dann aus r -dimensionalen ebenen Erzeugenden zusammen. Die Untersuchung solcher Flächen wird eingeordnet in eine allgemeine Theorie von Feldern m -dimensionaler Mannigfaltigkeiten in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Für diese wird affiner Zusammenhang, invariante Ableitung und eine Finslersche Metrik eingeführt. Von der „Indikatrix“ dieser Metrik wird nur vorausgesetzt: keine 2 ihrer Punkte haben Radienvektoren gleicher Richtung. Es werden damit nur diejenigen Vektoren v meßbar, die parallel einem Radiusvektor c der Indikatrix sind. Ist $v = v \cdot c$, so ist v die Länge von v . Das Bestehen der Dreiecksungleichung hängt von der Konvexität der Indikatrix ab (evtl. im Kleinen). Richtungen zu den unendlich fernen Punkten der Indikatrix heißen isotrop, Vektoren dieser Richtungen haben die Länge 0. Eine Kurve ist meßbar, wenn ihre

Tangentenvektoren meßbar sind. — Nach diesen Vorbereitungen läßt sich die Theorie der ersten und zweiten Variation von s , die Theorie von Jacoby, Legendre und Weierstraß in weitgehender Analogie durchführen. Eine Besonderheit: Geht für $r = 1$ durch jeden Punkt in jeder meßbaren Richtung eine Extremale, so geht durch jeden Punkt eine 2-dimensionale Fläche, welche die Eigenschaft besitzt, daß jede meßbare Kurve auf dieser Fläche eine Extremale ist. *Gericke (Freiburg).*

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

• Bloch, André et Gustave Guillaumin: *La géométrie intégrale du contour gauche*. Paris: Libr. Gauthier-Villars, 1949. VI, 144 p., fr. 1500,—.

Dieses Buch enthält eine systematische Darstellung der Integralgeometrie einer geschlossenen Raumkurve C . Es handelt sich um die Integrale $\int x_i^\alpha x_j^\beta x_k^\gamma dx_j$ ($j = 1, 2, 3$), erstreckt über C . Die geometrischen Eigenschaften, welche nur abhängen von den Integralen mit $\alpha + \beta + \gamma \leq n$, bilden die Integralgeometrie n -ter Ordnung. Kapitel I gibt eine allgemeine Übersicht über die Probleme dieser Geometrie. Im Kapitel II und III werden die Eigenschaften erster Ordnung dargestellt, für welche C mit einem Dreieck gleichwertig ist. Kap. IV handelt über das von zwei Kegeln (oder Konoiden), welche C als Leitkurve haben, eingeschlossene Volumen. In Kap. V findet man die kinematische Theorie der Kurve C (die Theoreme von Guldin und Koenigs mit einigen Verallgemeinerungen). Der Ort der Schwerpunkte der ebenen Schnitte eines Zylinders durch C ist eine Gerade. Diese Geraden zusammen bilden eine Kongruenz, „congruence de gravité“. Einige Eigenschaften dieser Kongruenz, welche zur Geometrie zweiter Ordnung gehört, findet man im Kap. VI. Im Kap. VII werden die charakteristischen Tensoren der Kurve C definiert und eingehend untersucht, insbesondere die geometrischen Gebilde, welche mit den Tensoren der Geometrie zweiter Ordnung zusammenhängen. Anwendungen werden gemacht im Gebiete der Hydrodynamik und des Elektromagnetismus. Kap. VIII handelt über nicht-euklidische Räume. Zuerst wird eine Theorie der Vektoren entwickelt. Sodann werden verschiedene Resultate der vorhergehenden Kapitel (z. B. das Theorem von Guldin) auf nicht-euklidische Räume erweitert. Am Ende des Buches findet man einige Anweisungen für die Verallgemeinerung auf n -dimensionale Räume. *J. Haantjes (Leiden).*

Guillaumin, Gustave: *Sur diverses applications de la géométrie intégrale du contour gauche*. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 109—110 (1948).

Einige Bemerkungen über den Inhalt des vorstehend besprochenen Buches. *J. Haantjes (Leiden).*

Bieri, H.: Mitteilung zum Problem eines konvexen Extremalkörpers. Arch. Math., Karlsruhe 1, 462—463 (1949).

Kürzlich hat der Ref. bewiesen (dies. Zbl. 32, 189), daß die symmetrische Kugelzone unter allen konvexen Rotationskörpern mit fest vorgegebenem Volumen V und ebensolcher Oberfläche F das kleinstmögliche Integral der mittleren Krümmung M aufweist; anschließend wurde verschiedentlich die an sich naheliegende Vermutung geäußert, daß der genannte Körper seine Extremaleigenschaft auch innerhalb der allgemeineren Klasse der konvexen, nicht notwendig rotationssymmetrischen Körper beibehält. — Verf. zeigt nun durch numerische Konfrontation einer symmetrischen Kugelzone mit einem nicht rotationssymmetrischen Kugelkalottenkörper, daß dies nicht zutrifft. Damit ist bewiesen, daß dem Minkowskischen Kappenkörper mit größtem M ein noch nicht näher bekannter Extremalkörper mit kleinstem M gegenübersteht, der aber im Gegensatz zum ersten nicht als Rotationskörper realisierbar ist. Ferner ist auch gezeigt, daß Ungleichungen zwischen den Maßzahlen M , F und V bestehen, welche nur für rotationssymmetrische, nicht aber für allgemeinere konvexe Körper Gültigkeit haben. *H. Hadwiger (Bern).*

Kampen, E. R. van and Aurel Wintner: *On the asymptotic distribution of geodesics on surfaces of revolution*. Časopis Mat. Fysiky, Praha 72, 1—6 u. tschechische Zusammenfassg. 6 (1947).

Cet article est consacré à l'étude des géodésiques d'une surface de révolution qui restent à distance finie. Les AA. donnent au moyen de considérations élémentaires l'expression explicite de la densité de probabilité de présence d'une telle géodésique. *Reeb (Saverne).*

Zwirner, Giuseppe: Condizioni sufficienti per la complanarità dei punti di un arco di curva. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 18, 197—202 (1949).

Verf. beweist: Es sei B ein eindeutiges, stetiges Streckenbild im E_3 , welches an jeder Stelle eine eindeutig bestimmte, rechtsseitige Halbtangente besitzt; die Trägergeraden dieser Halbtangenten sollen sämtlich eine feste (eigentliche oder uneigentliche) Gerade g treffen, die fremd ist zum (abgeschlossenen, beschränkten) Bogen B . Dann liegt B in einer g enthaltenden Ebene. Anm. des Ref.: Die zusätzliche Bedingung, daß g fremd ist zu B , deren Notwendigkeit sich durch ein Gegenbeispiel zeigen läßt, fehlt in der obigen Note. Die gleiche Ergänzung ist im Referat über eine frühere Note des Verf., dies. Zbl. 31, 79 (in Zeile 6 des Referats) vorzunehmen. *Haupt* (Erlangen).

Dinghas, Alexander: Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im euklidischen Raum von n Dimensionen. Math. Nachr., Berlin 2, 107—113 (1949).

Verf. schließt an einen Beweis der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Körper des gewöhnlichen Raumes an, den Ref. unter Verwertung älterer Ideen von W. Groß, W. Blaschke u. a. entwickelte (dies. Zbl. 29, 320). In der vorliegenden Arbeit wird auf analoge Weise eine Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung (*) $O(K) \geq O(S)$ für beschränkte meßbare Punktmengen K des n -dimensionalen euklidischen Raumes gegeben; hierbei bezeichnet $O(K)$ die durch

$$\liminf_{h \rightarrow 0} (V(K_h) - V(K))/h$$

definierte untere Minkowskische Oberfläche von K und S bedeutet eine mit K volumgleiche Kugel, so daß $V(K) = V(S)$ gilt. K_h bezeichnet die Außenmenge von K im Abstand h . Die Ungleichung (*) wird in einfachster Weise aus dem Hilfsatz $V(K_h) \geq V(S_h)$ gewonnen. Diese entscheidende Aussage, welche inhaltlich mit einem Sonderfall des auf allgemeine Punktmengen übertragenen Hauptsatzes der Brunn-Minkowskischen Theorie zusammenfällt, wird aus zwei Hilfstheoremen abgeleitet, welche sich auf die Steinersche Symmetrisierung $A \rightarrow \bar{A}$ beziehen. Diese lauten: 1. $V(\bar{A}B) = V(AB) + V((\bar{A} - \bar{A}B)(B - \bar{A}B))$; 2. $V(A_h) \geq V(\bar{A}_h)$. In (*) gilt das Gleichheitszeichen für solche K , die sich von S nur um eine Menge vom Minkowskischen Flächenmaß Null unterscheiden. Innerhalb einer passend eingeschränkten Klasse ergibt sich S als einzige extremale Menge. Verglichen mit den andern Abhandlungen des Verf., insbesondere auch derjenigen von E. Schmidt, welche u. a. die gleichen wesentlichen Ergebnisse hervorbrachten, zeichnet sich die vorliegende durch besondere Kürze aus. *H. Hadwiger* (Bern).

Dinghas, Alexander: Zur Theorie der konvexen Rotationskörper im n -dimensionalen Raum. Math. Nachr., Berlin 2, 124—140 (1949).

Die Minkowskischen Quermaßintegrale V_k ($k = 0, 1, \dots, n$) eines konvexen Körpers K im n -dimensionalen Raum können, wie bekannt, durch die Volumenformel

$$V(K_h) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} V_k h^k \quad \text{für den äußern Parallelkörper } K_h \text{ von } K \text{ im Abstand } h$$

definiert werden. — Die vom Verf. entwickelte Theorie bezieht sich auf konvexe Rotationskörper und gestattet, in methodisch einheitlicher Weise auf eine große Anzahl linearer Ungleichungen bezüglich der V_k zu schließen; die bis heute bekannten linearen Ungleichungen sind alle als einfachste Spezialfälle enthalten. — Von zentraler Bedeutung ist eine neue Integraldarstellung für die V_k , welche vom Verf. durch Anwendung eines analytischen Hilfssatzes hergeleitet wird. Diese lautet:

$$V_k = \omega_n d^{n-k} + \omega_{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) d^{n-k-1} l - \frac{\omega_{n-1}}{n} \int_0^\pi \frac{r^{n-k} - y^{n-k}}{\cos^2 \vartheta} \sin^k \vartheta d\vartheta.$$

Hierbei ist d der Äquatorradius (Radius eines größten Breitenkreises) von K , l ist die Länge des in K enthaltenen zylindrischen Stückes vom Radius d , $r = r(\vartheta) = p(\vartheta) \sin \vartheta + p'(\vartheta) \cos \vartheta$, wobei $p(\vartheta)$ die Stützfunktion und ϑ den Stützwinkel von K bezeichnet; ferner ist $y = y(\vartheta) = d \sin \vartheta$, und endlich ist $\omega_n = \pi^{n/2} / \Gamma(1 + n/2)$ eine Hilfsgröße, welche für $n = -1, 0, 1, 2, \dots$ in diesem Referat weitere Verwendung findet. — Die Hilfsfunktion $r(\vartheta)$ stellt den für fast alle ϑ eindeutig bestimmten Radius des von der Stützebene tangierten Breitenkreises von K dar. Bedeutsam ist der Umstand, daß die V_k durch die neue Formel einfache Integralfunktionale von r allein sind und nicht auch von den Ableitungen r' und r'' abhängig werden. Durch passende Linearkombinationen können definite Ausdrücke gewonnen werden, deren Diskussion elementar-algebraischer Natur ist. — Die vom Verf. erzielten allgemeinen Ergebnisse können in der folgenden Form kurz wiedergegeben werden: (A) Es sei $P(x, y) = \sum_0^n \lambda_k x^{n-k} y^k$, und es werde $P(1, 1) = 0$ und

$P(x, y) \geq 0$ für $x, y \geq 0$ vorausgesetzt. Dann ist $\sum_0^n \lambda_k V_k d^k \leq 0$; das Gleichheitszeichen gilt für „Kugelzylinder“ und, falls $\lambda_n = 0$ ist, sogar für „Kappenkugelzylinder“. (B) Es sei $P(x, y) = \sum_0^n \lambda_k x^{n-k} y^k$, und es werde $P(1, 1) = 0$ und $P(1, y) - P(x, y) \geq 0$ für $0 \leq x, y \leq 1$ vorausgesetzt. Dann ist

$$\sum_0^n \lambda_k V_k d^k \geq -S d^n, \quad \text{wobei} \quad S = \frac{\omega_{n-1}}{n} \int_0^\pi \frac{P(1, \sin \vartheta)}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta$$

ist; das Gleichheitszeichen gilt für die $n-1$ -dimensionale Kugel und, falls $P_y(1, 1) = 0$ ist, sogar für den Zylinder. — Die einfachsten Spezialfälle sind die folgenden: (A) $P(x, y) = (x - y)^2 x^{n-i-2} y^i$; es resultieren die $n-1$ Ungleichungen $V_i - 2V_{i+1}d + V_{i+2}d^2 \leq 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-2$). Diese sind bekannt; sie wurden vom Verf. im Jahre 1939 (dies. Zbl. 23, 172) in Verallgemeinerung klassischer Resultate von T. Bonnesen gewonnen. (B) $P(x, y) = (x - y) x^{n-i-1} y^i$; es resultieren die $n-1$ Ungleichungen $V_i - V_{i+1}d \geq -T_i d^{n-i}$ ($i = 0, 1, \dots, n-2$); hierbei ist $T_i = \frac{\omega_{n-1}}{n} \left[(i+1) \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} - i \frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} \right]$. (B') $P(x, y) = (x - y)^3 x^{n-i-3} y^i$; es resultieren die $n-2$ Ungleichungen

$$V_i - 3V_{i+1}d + 3V_{i+2}d^2 - V_{i+3}d^3 \geq -S_i d^{n-i} \quad (i = 0, 1, \dots, n-3);$$

hierbei ist $S_i = \frac{\omega_{n-1}}{n} \left[(4i+5) \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} - (4i+3) \frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} \right]$. Die Ungleichungen vom Typus (B) sind entgegengesetzt orientiert wie diejenigen, welche die klassische Theorie hervorbrachte. Die Minkowskischen Ungleichungen $V_{i+1}^2 - V_i V_{i+2} \leq 0$ folgen aus den oben angeschriebenen speziellen linearen Ungleichungen vom Typus (A). Im Falle $n = 3$ ergeben sich 5 unabhängige lineare Ungleichungen. Diese wurden in einer Arbeit, die derjenigen des Verf. unmittelbar vorausging, vom Ref. auf elementarem Wege gewonnen (dies. Zbl. 32, 120). H. Hadwiger (Bern).

Topologie:

Mirguet, Jean: Sur une extension de la notion d'espace topologique. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 772—773 (1948).

Suivant la terminologie de M. Fréchet, l'A. appelle dérivation dans un ensemble E une opération qui à toute partie e de E fait correspondre une partie e' telle que les conditions $M \in e'$ et $M \in (e - M)'$ soient équivalentes. Il étudie les conditions moyennant lesquelles e' est le dérivé de e pour une topologie sur E , ainsi que des cas plus généraux où ces conditions ne sont pas toutes remplies. J. Dieudonné.

Begle, E. G.: A note on S -spaces. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 577—579 (1949).

L'A. appelle espace (S) un espace E dans lequel tout recouvrement ouvert admet un recouvrement plus fin tel que tout ensemble de ce recouvrement ne rencontre qu'un nombre fini d'autres ensembles du même recouvrement. Il prouve que si A est un espace (S) de dimension n , et B un espace compact de dimension m , le produit $A \times B$ est un espace (S) de dimension $\leq m + n$. La méthode employée consiste à construire, pour un recouvrement ouvert \mathfrak{B}_0 de $A \times B$, un complexe localement fini D de dimension $\leq m + n$, une application f de $A \times B$ sur D et un recouvrement \mathfrak{Y} de D tel que $f^{-1}(\mathfrak{Y})$ soit un recouvrement plus fin que \mathfrak{B}_0 .

J. Dieudonné (Nancy).

Braconnier, Jean: Spectres d'espaces et de groupes topologiques. Portugaliae Math. **7**, 93—111 (1948).

Soit I un ensemble ordonné filtrant croissant (i. e. quels que soient $\alpha, \beta \in I$, il existe γ tel que $\alpha < \gamma$ et $\beta < \gamma$), à chaque $\alpha \in I$ associons un espace topologique E_α ; supposons que, dès que $\alpha < \beta$, on ait défini dans E_β un ensemble ouvert $G_{\beta\alpha}$ et une application continue $f_{\beta\alpha}$ de $G_{\beta\alpha}$ dans E_α ; supposons enfin que, pour $\alpha < \beta < \gamma$, on ait $G_{\gamma\alpha} = f_{\beta\gamma}^{-1}(G_{\beta\alpha})$ et $f_{\gamma\alpha} = f_{\beta\alpha} \circ f_{\beta\gamma}$; ces conditions étant réalisées, on a défini un spectre d'espaces. Cette notion généralise celles de limite projective et de limite inductive; à tout spectre on peut associer d'une façon bien déterminée un espace „limite“ E ; si en outre les E_α sont des groupes, les $G_{\beta\alpha}$ des sous-groupes, et les $f_{\beta\alpha}$ des représentations, alors on peut munir E d'une structure de groupe. L'A. étudie dans cet article les propriétés générales des spectres; le résultat essentiel semble être le suivant: soit E le groupe „limite“ d'un spectre de groupes topologiques séparés E_α (relativement à des sous-groupes $G_{\beta\alpha}$ et à des représentations $f_{\beta\alpha}$) soit H un groupe localement compact, admettant une représentation biunivoque et continue f dans E ; alors on peut considérer H comme le groupe limite d'un spectre de groupes localement compacts vérifiant certaines propriétés. Ce résultat permet notamment d'étudier la structure des groupes abéliens localement compacts, ainsi que des groupes maximale presque-périodiques.

R. Godement (Nancy).

Mayer, W.: Duality theorems. Fundam. Math., Warszawa **35**, 188—202 (1948).

Verf. hat in Ann. Math., Princeton, II. S. **46**, 1—28 (1945) eine Homologietheorie für Gruppensysteme (= Systeme von Kettengruppen mit Randoperatoren) bzw. für Netze (im Sinne von Lefschetz, Algebraic topology, New York 1942, Kap. 6) solcher Gruppensysteme aufgebaut, die insbesondere die gewöhnliche Homologietheorie eines Simplicialkomplexes bzw. die Čechsche Homologietheorie eines topologischen Raumes umfaßt. In dieser allgemeinen Theorie gelten formale Übertragungen der gewöhnlichen Dualitätssätze. Aus diesen formalen Dualitätssätzen leitet Verf. hier die topologischen Dualitätssätze von Poincaré und Alexander für Mannigfaltigkeiten her.

Burger (Frankfurt/M.).

White, Paul A.: Regular transformations on generalized manifolds. Duke math. J. **14**, 768—775 (1947).

In einer früheren Arbeit [Duke math. J. **12**, 101—106 (1945)] hat Verf. die n -regulären Abbildungen eines Kompaktums untersucht. Hier wird gezeigt, daß die Regularität einer Abbildung nicht dafür ausreicht, daß sie eine Mannigfaltigkeit in eine Mannigfaltigkeit derselben Dimension überführt, und eine zusätzliche Bedingung angegeben, unter der die Invarianz der Mannigfaltigkeit gilt. Die n -Regularität reicht nämlich nicht aus für die Invarianz des „kolokalen Zusammenhangs“, der folgendermaßen erklärt wird: Ein Kompaktum K heißt kolokal zusammenhängend in der n -ten Dimension, wenn es zu jedem $x \in K$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß jeder n -Zykel mod $(K - S(x, \varepsilon))$ kongruent 0 mod $(K - S(x, \delta))$ ist. Dabei bedeutet $S(x, \varepsilon)$ die offene Umgebung von x vom Radius ε . — Die Arbeit gipfelt in den folgenden drei Sätzen: Theorem 5. Die Abbildung $T(K) = K'$

sei $(n-1)$ -regulär, $T^{-1}(y)$ sei für jeden Punkt y von K' in allen Dimensionen $\leq n-1$ lokal zusammenhängend, K sei eine orientierbare verallgemeinerte n -Mannigfaltigkeit mit den Bettischen Zahlen der n -Sphäre, ferner gelte irreduzibel $p^n(K') = 1$ und $\dim K' \leq n$. Dann ist K' eine orientierbare verallgemeinerte n -Mannigfaltigkeit. Theorem 6. $T(K) = K'$ sei $(n-1)$ -regulär und $(n-1)$ -monoton, $T^{-1}(y)$ sei für jedes $y \in K'$ bis zur $(n-1)$ -ten Dimension (einschließlich) lokal zusammenhängend, K sei eine verallgemeinerte orientierbare n -Mannigfaltigkeit mit den Bettischen Zahlen der n -Sphäre, und es sei $\dim K' \leq n$; dann ist K' eine orientierbare verallgemeinerte n -Mannigfaltigkeit mit den Bettischen Zahlen der n -Sphäre. Dabei heißt T $(n-1)$ -monoton, wenn $T^{-1}(y)$ für jedes $y \in K'$ in den Dimensionen 0 bis $n-1$ verschwindende Bettische Zahlen hat. Theorem 7. $T(K) = K'$ sei $(n-1)$ -regulär und n -monoton, $T^{-1}(y)$ für jedes $y \in K'$ bis zur $(n-1)$ -ten Dimension lokal zusammenhängend; ferner sei K eine orientierbare verallgemeinerte n -Mannigfaltigkeit und $\dim K' \leq n$. Dann ist K' eine orientierbare verallgemeinerte n -Mannigfaltigkeit mit den Bettischen Zahlen der n -Sphäre. *L. Vietoris (Innsbruck).*

Eckmann, Beno: Sur les applications d'un polyèdre dans un espace projectif complexe. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1397—1399 (1949).

L'A. applique la théorie des extensions d'Eilenberg (Lectures in topology, Univ. of Michigan 1941, p. 57—99) au cas de l'espace projectif complexe; soit Y un polyèdre simple, tel que $\pi_n(Y) = 0$ pour tout $n < r$, sauf au plus pour la valeur $q < r$. La classe fondamentale Z de $H^q(Y, \pi_q)$ est celle qui, sur tout cycle $y \in H_q(Y)$ prend la valeur $H_q(y)$. Soit f une application d'un polyèdre P dans Y ; la classe caractéristique D_f est l'image transposée f^*Z de Z . L'extension de f sur P_r à P_{r+1} (P_k k -squelette de P) permet de définir le cocycle obstruction C_f ; la classe de $C_f \in H^{r+1}(P, \pi_r(y))$ est déterminée par celle de D_f . Si Y est l'espace projectif à m dimensions complexes E_m , on a $q = 2$ et $r = 2m + 1$, les groupes $\pi_2(E_m)$ et $\pi_{2m+1}(E_m)$ étant isomorphes au groupe des entières. La classe C_f n'est autre alors que $(D_f)^{m+1}$, la multiplication étant prise dans l'anneau de cohomologie entière de P . La démonstration utilise un procédé de Steenrod; considérer E_m comme sous-complexe cellulaire de E_{m+1} ; toute application de P_{2m+1} dans E_m se laisse prolonger en une application de P_{2m+2} dans E_{m+1} , et si e_{m+1} est le cocycle fondamental de E_{m+1} , la relation $e_{m+1} = (Z)^{m+1}$ se transpose dans l'anneau de cohomologie de P . L'A. indique comme application: cas où P est une variété de dimension $2m + 2$, analytique complexe ou algébrique. *Thom (Pfaffenhofen).*

Chern, Shiing-shen: On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle. Ann. Math., Princeton, II. S. 49, 562—372 (1948).

Es wird [auf Grund der bekannten Simplicialzerlegung — C. Ehresmann, dies. Zbl. 16, 74] die Struktur des Cohomologieringes der Graßmannschen Mannigfaltigkeit $H(n, N)$ der n -dimensionalen Ebenen durch einen Punkt des $(n + N)$ -dimensionalen euklidischen Raumes mit Koeffizienten mod 2 bestimmt. Verf. zeigt, daß dieser Ring k -dimensionale Elemente α^k mit folgender Eigenschaft enthält: Die mod 2 reduzierten charakteristischen Klassen des durch die Abbildung f des Raumes R in $H(n, N)$ induzierten Sphärenbündels sind die Cohomologieklassen $f^*(\alpha^k)$ [wobei f^* der f entsprechende Homomorphismus des Cohomologieringes von $H(n, N)$ in jenen von M ist]. Als Anwendung wird eine notwendige Bedingung dafür angegeben, daß eine differenzierbare Mannigfaltigkeit in den n -dimensionalen euklidischen Raum E^n eingebettet werden kann. Insbesondere zeigt Verf.: Der reelle n -dimensionale projektive Raum P^n kann höchstens dann in E^{n+2} eingebettet werden, wenn n von der Form $2^k - 1$, $2^k - 2$ oder $2^k - 3$ ist. Aus einem Satz von H. Whitney [On the topology of differentiable manifolds, in Michigan Lectures in Topology 1940, S. 130] scheint Ref. zu folgen, daß diese Bedingung für n sogar notwendig ist für die Einbettbarkeit von P^n in E^{n+3} . *Specker (Zürich).*

Hirsch, Guy: Un théorème sur les transformations des sphères. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 32, 394—399 (1947).

Satz: Sei T eine stetige Abbildung der Sphäre S^n in sich, A die Abbildung von S^n , die jedem Punkt seinen Antipoden zuordnet; dann gibt es einen solchen Punkt $p \in S^n$, daß entweder $TA(p) = T(p)$ oder $TA(p) = AT(p)$. Der Beweis ergibt sich aus den beiden folgenden Sätzen über Abbildungen von S^n in sich: (1) Ist $TA(p) \neq T(p)$ für alle $p \in S^n$, so ist der Abbildungsgrad von T ungerade [K. Borsuk, C. r. Soc. Sci. Lett. Varsovie 31, 7—12 (1938); dies. Zbl. 19, 238]. (2) Ist $TA(p) \neq AT(p)$ für alle $p \in S^n$, so ist der Abbildungsgrad von T gerade. *Specker* (Zürich).

Wu, Wen-tsün: Sur la structure presque complexe d'une variété différentiable réelle. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 972—973 (1949).

Soit M une variété différentiable, orientable, de dimension m ; à la structure fibrée tangente de M sont attachées, dans la cohomologie de M , les classes caractéristiques suivantes: classes de Stiefel-Whitney W^i définies mod 2 pour toute dimension i ; classes de Pontrjagin P^{4k} , entières, pour toute $\dim. = 0 \bmod 4$. Si de plus, pour m pair, la structure tangente admet pour groupe de structure le groupe unitaire (M presque-complexe), l'application correspondante de M dans la grassmannienne complexe introduit des classes caractéristiques entières C^{2j} (classes de Chern). Introduisons l'indéterminée t et posons:

$$P(t) = \sum (-1)^k P^{4k}(M) t^{2k}; \quad W(t) = \sum W^i(M) t^i; \quad C(t) = \sum C^{2k} t^{2k}.$$

L'étude du type d'homologie de l'application canonique de la grassmannienne complexe dans la grassmannienne réelle conduit aux relations: $W(t) = C(t)$ réduit modulo 2 et $P(t) = C(t) \cup C(-t)$. Les relations donnent des conditions nécessaires (suffisantes pour $m = 4$) pour qu'une variété M admette une structure presque-complexe. La démonstration complète, avec de nombreuses applications, paraîtra dans la Thèse de l'A. aux Publ. Inst. Math. Strasbourg. *Thom* (Pfaffenhofen).

Bing, R. H.: Skew sets. Amer. J. Math. 69, 493—498 (1947).

Nach Kuratowski enthält jede kompakte stetige Kurve, die nicht ohne Überschneidungen in die Kugelfläche einbettbar ist und nur endlich viele einfache geschlossene Kurven enthält, einen aus 6 Knotenpunkten P_i, Q_k und 9 Kanten $P_i Q_k$ ($i, k = 1, 2, 3$) bestehenden Graphen (Typ I) oder einen aus 5 Punkten und allen 10 möglichen Verbindungskanten bestehenden (Typ II). Hier werden Punkt-mengen S_1 und S_2 betrachtet, Verallgemeinerungen von Typ I und II, und zwar ist S_1 Summe von 9 zusammenhängenden Mengen $M(P_i Q_k)$ ($i, k = 1, 2, 3$), wobei $P_i + Q_k \subset M(P_i Q_k)$; außerdem soll $M(P_i Q_{k_1})$ nur dann einen Häufungspunkt von $M(P_{i_2} Q_{k_2})$ enthalten, wenn $(P_{i_1} + Q_{k_1}) \cdot (P_{i_2} + Q_{k_2}) \neq 0$. Es wird bewiesen, daß S_1 dann 9 Bögen enthält mit den Endpunkten P_i, Q'_k , wobei zwei Bögen nur dann einen nichtleeren Durchschnitt haben, wenn sie einen Endpunkt gemeinsam haben. Daraus folgt dann (der Beweis dazu ist nicht ausgeführt), daß die Summe der Bogen nicht homöomorph einer Teilmenge der Kugelfläche sein kann und daher einen Teilgraphen vom Typ I enthält. Vorausgesetzt wird dabei, daß jede zusammenhängende offene Teilmenge in S_1 bogenverknüpft ist. Entsprechendes gilt für S_2 , die Verallgemeinerung von Typ II, nur daß S_2 einen Teilgraph vom Typ I oder II enthalten muß. — Folgerungen aus den Sätzen: 1. Zu n Bögen in der Ebene, die paarweise fremd sind, falls sie keine Endpunkte gemeinsam haben, gibt es n Bögen mit den gleichen Endpunkten, die höchstens paarweise Endpunkte gemeinsam haben. 2. Keine ebene Punktmenge G enthält 5 paarweise fremde Teilmengen, so daß die abgeschlossene Summe von je zwei Teilmengen die abgeschlossene Hülle einer in G offenen zusammenhängenden Teilmenge ist. *Künnet* (Erlangen).

Bernhart, Arthur: Six-rings in minimal five-color maps. Amer. J. Math. 69, 391—412 (1947).

Eine Karte (Gebietseinteilung der Kugelfläche) heißt „minimal“, wenn sie nicht mit vier Farben im Sinne des Vierfarbenproblems gefärbt werden kann, dagegen jede, deren Gebietszahl um 1 kleiner ist. Alle Sätze beziehen sich hier auf Minimalkarten. Ein „eigentlicher“ n -Ring ist eine zyklische Kette von n Gebieten, von denen jedes nur mit seinen beiden Nachbargebieten je eine Kante gemeinsam hat; außerdem muß sein Komplement auf der Kugel in zwei Komponenten zerfallen, von denen eine das „Innere“, die andere das „Äußere“ des Rings heißen soll. Für $n < 5$ gibt es keine eigentlichen n -Ringe. — Ändert man einen eigentlichen 4-Ring ohne Inneres mit den Gebieten A, B, C, D , wobei A auch mit C eine gemeinsame Kante hat, in einer Karte unter Beibehaltung aller übrigen Inzidenzbeziehungen so ab, daß B mit D , anstatt A mit C , eine Kante gemeinsam hat, so erhält man eine färbbare Karte. Das Innere eines eigentlichen 5-Rings besteht aus einem einzigen 5-Eck. — Für eigentliche 6-Ringe gibt es 6 Lösungsgruppen; jede umfaßt einander bedingende Färbungsmöglichkeiten des Rings, wobei entweder nur die Gebiete des Innern oder des Äußern färbbar sind. Die Gruppen 1 bis 3 beziehen sich auf Ringe, bei denen das Innere aus einem, zwei oder drei Gebieten besteht, für die übrigen drei Gruppen läßt sich nichts über die polygonale Zusammensetzung des Innern oder Äußern sagen. Für die umfangreichen Untersuchungen aller möglichen Fälle wird ein eigener Kalkül eingeführt an Hand besonderer Tabellen und Schemata, die jeweils zusammenhängende Färbungsmöglichkeiten angeben, von denen mindestens eine zutreffen muß. Das Hauptergebnis ist: Das Innere (bzw. Äußere) eines 6-Rings enthält weniger als 4 oder mehr als 15 Gebiete; in letzterem Falle schließt sich an den 6-Ring im Innern ein weiterer eigentlicher n -Ring an mit $n > 8$; ist die Zahl der übrigen Polygone im Innern h , so ist, über alle m -Ecke des Innern summiert, $\Sigma(m - 5) = h > 6$. Kiinneth (Erlangen).

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

● Kaufmann, Walther: Einführung in die Technische Mechanik. Nach Vorlesungen.

I.: Statik starrer Körper. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1949. VI, 166 S. mit 194 Abb., DM 15.—.

Die mit dem ersten Band nunmehr erscheinende „Einführung in die technische Mechanik“ umfaßt im wesentlichen den Mechanikunterricht an technischen Hochschulen bis zur Vorprüfung. Das Gesamtwerk des durch seine früheren Lehrbücher der technischen Mechanik bekannten Münchner Hochschullehrers soll in vier Bände aufgeteilt werden, und zwar in der allgemein üblichen Reihenfolge: 1. Statik starrer Körper, 2. Festigkeitslehre, 3. Dynamik, 4. Hydromechanik. Zur Kennzeichnung des Inhaltes des ersten Bandes sei folgender Abschnitt aus dem Vorwort wiedergegeben: „In dem hier vorliegenden ersten Band werden nach einem einführenden Abschnitt über die Grundbegriffe der Mechanik behandelt: Die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene und im Raume, Fragen des Gleichgewichts einer Kräftegruppe, die Lehre vom Schwerpunkt, das Gleichgewicht gestützter ebener und räumlicher Körper und Körpersysteme, die „trockene“ Reibung und, in einem Schlußkapitel, als fundamentaler Satz der Statik: Das Prinzip der virtuellen Verrückungen. Alle theoretischen Ableitungen und Betrachtungen sind durch zahlreiche Anwendungsbeispiele ergänzt, die im allgemeinen bis zu den Enlösungen durchgeführt sind. Neuartig dürften die Darstellungen auf S. 39 über das Gleichgewicht einer ebenen Kräftegruppe sowie auf S. 98—100 über das Gleichgewicht einer Gelenkstangenverbindung sein.“ — Bei der Auswahl des Stoffes und der Art der Darstellung war dem Verf. offenbar daran gelegen, ein Lehrbuch zu schaffen, das den Studierenden zur Ergänzung und Vertiefung des in den Vorlesungen gehörten Stoffes dienen soll. Nach Ansicht des Ref. wird der vorliegende Band dieser Forderung für den Bereich, den er zu erfassen beabsichtigt, in jeder Weise gerecht und darüber hinaus den Studierenden der technischen Hochschulen sowie vielen Ingenieuren in der Praxis bei der Aneignung der grundlegenden Probleme und der Anwendung der entwickelten Verfahren ein unentbehrlicher und zuverlässiger Berater sein. Dem Erscheinen der drei weiteren Bände darf man mit berechtigtem Interesse entgegensehen.

Gran Olsson (Trondheim).

●Pöschl, Theodor: *Lehrbuch der Technischen Mechanik. I. Statik und Dynamik.*

3. umgearbeitete Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1949. 257 Abb., VIII, 343 S.; geb. DM 25.—, geh. DM 22,50.

Die vorliegende dritte Auflage des bekannten Lehrbuches stellt eine äußerst wertvolle Bereicherung der Lehrbuchliteratur der Nachkriegszeit dar. Die technische Mechanik nimmt im Hochschulunterricht eine wichtige Stellung zwischen den theoretischen (Mathematik, Physik und Geometrie) und den technischen Fächern ein. „Ihr Studium bereitet erfahrungsgemäß dem Anfänger gewisse Schwierigkeiten, die sich besonders dann einstellen, wenn der Studierende in die Lage kommt, selbständig mechanische Aufgaben von der Art, wie sie die technische Praxis stellt, lösen zu müssen. Und gerade hierbei kann sich erst erweisen, ob die Lehren der Mechanik in ihrer ganzen Bedeutung erfaßt worden sind oder nicht. Mit der Aneignung und Wiedergabe der Lehrsätze ist es nicht getan; so einfach diese Sätze auch scheinen mögen, so schwierig ist es für den Anfänger, ihre Tragweite zu erfassen und sie auf die mannigfachen Fragen, die die Natur und die technische Praxis stellt, richtig anwenden zu lernen.“ — Das vorliegende Buch soll zur Ausschaltung der dabei auftretenden Schwierigkeiten dienen und bringt in knapper Form unter dauernder Bezugnahme auf Beispiele aus der Technik die einfachsten und wichtigsten Lehrsätze der Mechanik in einem Umfang, wie sie heute von den technischen Studierenden gefordert werden. Auf eine axiomatische Begründung der Mechanik ist dabei vollständig verzichtet, dagegen auf eine exakte Formulierung der Lehrsätze mit genauer Angabe der Gültigkeitsbereiche große Sorgfalt gelegt worden. Um Verbindungen zu den Anwendungen herzustellen, sind wiederholt Hinweise auf den Ansatz zur Lösung einfacher Aufgaben, meist unter Angabe der dabei auftretenden, verschiedenen Möglichkeiten gemacht worden. Mit Recht hat Verf. bei derartigen Aufgaben auch scheinbar selbstverständliche Dinge ausgesprochen, wenn dadurch das Verständnis für die Anwendung der vorgetragenen Lehrsätze gefördert werden konnte. Das Buch bringt ferner die analytischen und graphischen Verfahren, die alle dem praktischen Bedürfnis entsprungen sind, unter Angabe der Bereiche ihrer Anwendbarkeit. Das Verständnis der sachlichen Äquivalenz der Aussagen in beiden Arten der Darstellung hält Verf. für eine beim Unterricht in der technischen Mechanik wichtige Frage. Nach Ansicht des Verf. kann die Mechanik „am einfachsten und natürlichsten in die Gesamtheit unseres Wissens eingeordnet werden, wenn man sich auf den Boden einer vernünftigen realistischen Weltansicht stellt, die im Grunde, ob ausgesprochen oder nicht, die ganze Naturwissenschaft beherrscht und besonders für die Technik als unentbehrlich bezeichnet werden darf. Trotz aller begründeten erkenntnistheoretischen Bedenken und Einwände halte ich es für ausgeschlossen, die einführende Vorlesung aus der technischen Mechanik auf Grund eines anderen Standpunktes praktisch erfolgreich zu entwickeln.“ Nach mehrjähriger Erfahrung im Unterricht der Mechanik an technischer Hochschule möchte Ref. sich dieser Ansicht des Verf. ohne Vorbehalt anschließen. *Gran Olsson.*

Peretti, Giuseppe: *A proposito di un curioso effetto giroscopico.* Atti Sem. mat. Univ., Modena 2, 75—86 (1948).

L'A. considera un sistema meccanico formato da un giroscopio e da un involucro di forma sferica. L'asse di simmetria del giroscopio è imperniato all'involucro ed è di simmetria anche per quest'ultimo; il baricentro del sistema è diverso dal centro dell'involucro e ciò per una opportuna disposizione delle sue masse. Con il sistema sopra descritto l'A. dà conto dalle proprietà di un noto giocattolo e cioè: a) appoggiato l'involucro su un tavolo orizzontale e messo in moto il giroscopio il moto si trasmette all'involucro fino a che ruota con la velocità angolare del giroscopio, b) soddisfatte certe condizioni strutturali e se la velocità iniziale del giroscopio supera un certo valore, il baricentro del sistema, anche se più basso del centro della sfera, tende a portarsi nella posizione più alta possibile. Per spiegare la proprietà a) basta l'attrito fra i perni del giroscopio, per la b) occorre anche tener conto dell'attrito del tavolo.

Graffi (Bologna).

Donder, Théophile De et Paul Melchior: *Le principe de moindre contrainte de Gauss appliqué à la dynamique des corps solides à liaisons non holonomes.* C. 1. Acad. Sci., Paris 227, 1017—1018 (1948).

Les AA. indiquent un traitement, à partir du principe de la moindre contrainte de Gauss, du mouvement d'un cerceau roulant et pivotant sans glisser sur un plan horizontal. Les équations sont formées en notations tensorielles [voir De Donder, Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 28 (1942)]. Les AA. comparent en particulier les équations obtenues avec celles fournies par le principe de moindre action.

Lichnerowicz (Paris).

Rubbert, F. K.: Der Einfluß der Dämpfung bei nichtlinearen Schwingungen. 1. Gedämpfte Pendelschwingungen. Ingenieur-Arch. 17, 336—342 (1949).

Zunächst wird für das Pendel mit quadratischer Dämpfung mit der Gleichung für die erste Halbschwingung $\ddot{\varphi} + n^2 \sin \varphi = \frac{1}{2} h \dot{\varphi}^2$ bei den Anfangswerten $\varphi(0) = \alpha$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ ein Reihenansatz gemacht (wobei τ proportional zur Zeit t ist)

$$\varphi = \alpha \Phi_1(\tau) + \alpha^3 \Phi_3(\tau) + \alpha^5 \Phi_5(\tau) + \dots$$

und Φ_1 , Φ_3 , Φ_5 berechnet. Für die Dauer der ersten Halbschwingung ergibt sich

$$T_1 \approx \frac{\pi}{n} \left[1 + \frac{1}{16} \alpha^2 \left(1 + \frac{2}{3} h^2 \right) - \frac{1}{24} \alpha^3 h + \frac{11}{3072} \alpha^4 \right].$$

Dieser Ausdruck enthält verschiedene bisher aufgestellte Näherungen als Spezialfälle. Entsprechende Rechnungen ergeben für das Pendel mit Reibung $\ddot{\varphi} + n^2 \sin \varphi + s n^2 (\text{sgn } \dot{\varphi}) = 0$ den Wert

$$T_1 \approx \frac{\pi}{n} \left[1 + \frac{1}{16} (\alpha - s)^2 + \frac{1}{4} s^2 \right]$$

und für das Pendel mit linearer Dämpfung $\ddot{\varphi} + 2k \dot{\varphi} + n^2 \sin \varphi = 0$ das Amplitudengesetz für die Amplitude φ_k im k -ten Umkehrpunkt

$$\left| \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} \right| \approx e^{-\pi \delta / \gamma} \left[1 - \varphi_k^2 \frac{11 + \delta^2 - 12 \delta^4}{48 \gamma^2 (4 - 3 \delta^2)} (1 - e^{-2\pi \delta / \gamma}) \right],$$

wobei $\delta = \frac{k}{n}$, $\gamma = \sqrt{1 - \delta^2}$ gesetzt ist. Auch im letzten Fall wird T_1 angegeben, so wie in den ersten beiden Fällen auch Formeln für die Amplituden aufgestellt werden. Collatz (Hannover).

Pierucci, Mariano: La regolarità nel sistema solare dopo la scoperta del quinto satellite di Urano. Interpretazione quantistica e previsione dell'esistenza di uno o due pianeti ultraplutoniani. Atti Sem. mat. Univ., Modena 3, 191—204 (1949).

Erörterungen über einfache ganzzahlige Gesetzmäßigkeiten im System der großen Planeten und im Satellitensystem des Uranus. Heckmann (Hamburg).

Negri, Domenico: Su un notevole integrale primo che si incontra in cosmogonia. Atti Sem. mat. Univ., Modena 3, 223—226 (1949).

Angabe eines ersten Integrals der Bewegungsgleichungen eines Planeten im Felde der Sonne, wenn das Gravitationsgesetz eine beliebige Funktion des Abstandes und seiner ersten Ableitung nach der Zeit ist. Heckmann (Hamburg).

Elastizität. Plastizität. Akustik:

Swainger, K. H.: An anomaly in the classical theory of infinitesimal deformation. Nature, London 164, 888 (1949).

An einem einfachen Beispiel wird die Behauptung des Verf. illustriert, daß der allgemeine, komplexe Spannungstensor, wie er in der klassischen Elastizitätstheorie definiert ist, bei unsymmetrischem, infinitesimalem Deformationstensor gegenüber euklidischen Koordinatenänderungen nicht invariant im üblichen Sinne sein kann.

Hardtwig (München).

Hopkins, H. G.: Elastic stability of infinite strips. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 587—594 (1949).

Untersucht werden Gleichgewichtsprobleme von unendlich langen, rechtwinkligen, isotropen Platten, die an den langen Kanten unterstützt werden. Unter Verwendung des elastischen Potentials werden zunächst die Gleichgewichtsbedingungen für den Fall aufgestellt, daß für jede der langen Kanten gleiche, willkürlich gewählte Normalspannungen vorgeschrieben sind (deren Willkür nur durch die Forderung eingeschränkt ist, sich durch Fouriersche Integrale darstellen zu lassen), wobei im Unendlichen Spannungen wie Verrückungen als verschwindend vorausgesetzt werden. Von der kritischen Druckverteilung wird gezeigt, daß sie sich aus

den Eigenwerten einer gewöhnlichen, linear-homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung herleiten läßt. Die entsprechende Integralgleichung ist singulär mit unsymmetrischem Kern. Das allgemeine Problem wird sodann auf den Fall spezialisiert, daß die Normaldrucke an punktförmigen Stellen angreifen, sowie auf den Fall, daß sie gleichmäßig über einen endlichen Bereich der Längskanten verteilt sind.

Hardtwig (München).

Elliott, H. A.: Axial symmetric stress distributions in aeolotropic hexagonal crystals. The problem of the plane and related problems. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **45**, 621—630 (1949).

In Verfolgung früherer Arbeiten löst Verf. einige elastostatische Probleme für hexagonales Material und Zylindersymmetrie um die hexagonale Achse. Die elastischen Gleichungen werden mit Hilfe einer Hankel-Transformation gelöst. Die Koeffizienten sind mit den Randwerten durch eine Integralgleichung verknüpft. Die allgemeine Lösung dieser Integralgleichung wird angegeben für den Fall des Eindrucks eines beliebigen, um die hexagonale Achse zylindersymmetrischen Körpers auf eine senkrecht zu dieser Achse gelegenen Ebene. Speziell werden Kugel und Kegel behandelt; die komplette Lösung für einen Zylinder mit planer Oberfläche wird gegeben. Ferner wird die vollständige Lösung für einen zylindrischen dünnen Riß senkrecht zur hexagonalen Achse bei homogenem, äußerem Zug in α -Achsenrichtung im unendlich ausgedehnten Material gegeben. Die Normalspannung in der Rißebeine unterscheidet sich nicht vom isotropen Fall.

Leibfried.

Conrad, Karl Leroy: Stress distribution due to hydrostatic pressure on a parabolic boundary. *Iowa College, J. Sci.* **23**, 397—404 (1949).

Der allseitig unendlich ausgedehnte Raum sei von einem elastischen Medium erfüllt und — etwa mit der z -Achse als Rotationsachse — nach einem Rotationsparaboloid ausgebohrt. Das Paraboloid stellt dann die Oberfläche des Körpers dar. Es mögen folgende Oberflächenbedingungen erfüllt sein: 1. Die Normalspannungen sind gleich dem hydrostatischen Druck in jenem Bereich des Paraboloids, für den hydrostatische Belastung vorausgesetzt wird, im Übrigen mögen sie identisch verschwinden. 2. Die Tangentialkomponenten des Spannungstensors verschwinden auf der ganzen Oberfläche. 3. Der Spannungstensor verschwindet im Unendlichen identisch. Verf. bestimmt unter diesen Voraussetzungen die Spannungsverteilung im Körper und gibt die Lösung in geschlossener Form.

Hardtwig (München).

Sonntag, G.: Beanspruchung der allgemeinen, geschlossenen sowie auch offenen Kegelschale durch Belastung ihrer Spitze. *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 178—185 (1949).

Ableitung der Spannungsverteilung in allgemeinen Kegelschalen als Membrantheorie auf Grund des Prinzips der extremalen Formänderungsenergie.

Neuber.

Okubo, H.: On the problem of a notched plate of an aeolotropic material. *Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics*, London, VII. S. **40**, 913—917 (1949).

Für das Problem der symmetrischen Außenkerbe, dessen Lösung für isotropen Werkstoff durch Ref. [Kerbspannungslehre 1937; ferner *Z. angew. Math. Mech.* **13**, 439—442 (1933)] angegeben wurde, wird im Falle der Orthotropie die entsprechende Lösung für die Spannungsverteilung hergeleitet.

H. Neuber (Dresden).

Chang, Che-Tyan: The shape of a piston ring in its unrestrained state. *J. appl. Mech.*, New York **16**, 134—138 (1949).

Verf. entwickelt eine allgemeine Beziehung zwischen der freien (d. h. unbeanspruchten) Gestalt eines Kolbenringes im nicht deformierten Zustand und der Verteilung des Radialdruckes gegen die Zylinderwände nach Einbau des Kolbenringes in den Zylinder. Es werden folgende Annahmen gemacht: 1. Der Werkstoff des Ringes gehorcht den üblichen Gesetzen der Elastizität. 2. Die Dicke des Ringes in radialer Richtung soll gegenüber dem Ringdurchmesser als klein angesehen werden. Aus der letzteren Annahme folgt, daß der Ring als gekrümmter Stab (und

nicht etwa als Scheibe nach der Elastizitätstheorie) gerechnet werden kann. Die Berechnung wird in der Weise durchgeführt, daß eine für den vorliegenden Fall geeignete Druckverteilung angenommen und danach die entsprechende Gestalt des Kolbenringes in „freiem“ Zustand ermittelt wird. Der entsprechend geformte Ring ergibt nach Einbau die gewünschte radiale Druckverteilung zwischen Zylinderwand und Kolbenring.

Gran Olsson (Trondheim).

Reissner, Eric: On bending of curved thin-walled tubes. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **35**, 204—208 (1949).

Die Tatsache, daß ein gebogenes dünnwandiges Rohr biegsamer ist als ein gerades Rohr von gleichem Querschnitt, ist von Th. v. Kármán [*Z. VDI.* **55**, 1889 (1911)] entdeckt worden, der zeigte, wie das Abflachen des Rohrquerschnitts infolge der Hauptbiegungsspannungen für diesen Umstand verantwortlich ist. Die Kármánsche Näherungslösung bedient sich bei der Lösung des Minimumprinzips für die elastischen Verschiebungen in der Rayleigh-Ritzschen Fassung. — Verf. betrachtet die Aufgabe vom Standpunkt der Theorie der dünnen elastischen Schale. Insofern als die Biegung eines gebogenen, dünnen Rohres als ein Problem der Ermittlung einer axialsymmetrischen Spannungsverteilung in einer Rotationsschale betrachtet werden kann, muß es möglich sein, die endgültige Formulierung der Aufgabe auf die Ergebnisse von H. Reißner und E. Meißner über die Biegung und Dehnung von Rotationsschalen zurückzuführen, wobei nicht nur die Spannungen, sondern auch die Verschiebungen rotationssymmetrisch und eindeutig sind. Diese letztere Annahme schließt das Problem der Biegung des Rohres von ihren Ergebnissen aus. Verf. modifiziert diese, indem er nicht fordert, daß die Verschiebungen eindeutig und rotationssymmetrisch sind, indem er die tangentielle Verschiebung v in der Form $v = kr\vartheta$ ansetzt, wo r und ϑ Polarkoordinaten, k eine Konstante bedeuten. Die Gleichungen der Dehnungen, ausgedrückt durch die Verschiebungen, die Verträglichkeits- und Gleichgewichtsbedingungen sowie die Spannungs-Dehnungsbedingungen für ein orthogonal-anisotropes Rohr werden entwickelt, die auf zwei simultane Differentialgleichungen zweiter Ordnung reduziert werden, nach deren Lösung eine Beziehung zwischen dem Beiwert k und dem angreifenden Biegemoment gefunden wird. Die spezielleren Fälle von Kármán und Golovin (s. Timoshenko, *Theory of elasticity*, New York 1934, 60) sowie von Winkler und Resal (s. Timoshenko a. a. O.) werden durch geeignete Wahl der Parameter aus den allgemeineren Ergebnissen des Verf. erhalten.

Gran Olsson (Trondheim).

Rivlin, R. S.: A note on the torsion of an incompressible highly-elastic cylinder. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **45**, 485—487 (1949).

Vereinfachung und Ergänzung zu einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **31**, 426), die sich mit der Ermittlung der Spannungen bei der Verdrehung eines Zylinders aus isotropem, unzusammendrückbarem, hochelastischem Material befaßte, welche im Innern bei Aufbringung von Oberflächenkräften auf die ebenen Endflächen des Zylinders entstehen. Hierzu müssen Schubspannungen und Normalspannungen Z_v parallel zur Zylinderachse aufgebracht werden. Der Ausdruck für Z_v wird vereinfacht, und das erforderliche Verdrehungsmoment wird angegeben.

Th. Pöschl.

Payne, L. E.: Torsion of composite sections. *Iowa College, J. Sci.* **23**, 381—395 (1949).

Das Saint-Venantsche Torsionsproblem wird gelöst für Balken mit solchen Querschnitten, die a) aus zwei verschiedenen, isotropen Materialien, b) aus einerseits isotropen, andererseits orthotropen Materialien bestehen. Es werden die zugehörigen numerischen Werte für die Torsionsfestigkeit berechnet und verglichen mit jenen, die sich ergeben würden, wenn der Balken entweder voll isotrop oder voll orthotrop wäre, bei sonst gleicher Form des Querschnittes. Betrachtet wird kreisförmiger, elliptischer und rechteckiger Querschnitt, wobei im Fall b) der Materialsprung an einem konzentrischen Kreis, einer konfokalen Ellipse oder an der Recht-

eckmittellinie erfolgt, je nachdem, ob der Gesamtquerschnitt kreis- oder ellipsenförmig oder rechteckig vorausgesetzt war. *Hardtwig* (München).

Holm, Else, Ragnar Holm and Erle I. Shobert II: Theory of hardness and measurements applicable to contact problems. *J. appl. Physics*, Lancaster Pa. **20**, 319—327 (1949).

Die bei der Kugeldruckprobe als „Härte“ definierte Größe $H = P/S_m$ (P = Berührungskraft, S_m = Eindrucksfläche) ist nicht eine eindeutige Stoffkonstante, sondern eine Funktion der spezifischen Eindrucktiefe D , wobei D den Quotienten wirkliche Tiefe: Krümmungshalbmesser des Eindrucks bedeutet. H hängt ferner von geometrischen und metallurgischen Bedingungen ab, die im Zusammenhang mit den bekannten empirischen Formeln diskutiert werden, insbesondere wird auch die Beziehung zwischen H und der Streckgrenze des Materials, sowie der Einfluß der Versuchsdauer erörtert. Die Eindrücke beim Härteversuch mit zwei gekreuzten Zylindern, die in jedem von ihnen erzeugt werden, geben nahezu dieselbe Härte wie die Kugelhärte, sobald D einen bestimmten Wert überschreitet. *Th. Pöschl*.

Taylor, G. I.: The formation and enlargement of a circular hole in a thin plastic sheet. *Quart. J. Mech. appl. Math.*, Oxford **1**, 103—124 (1948).

Verf. behandelt folgendes technische wichtige Problem: In einem flachen Blechstreifen wird durch einen vorn konisch ausgebildeten Dorn ein kreisförmiges Loch erzeugt (das auch durch einen nach außen gerichteten radialen Druck am Lochrand entstehen kann), wobei das Metall nahe am Loch gewissermaßen zu einem Krater angestaucht wird. Das mechanische Verhalten dieser Formänderung während ihrer Entwicklung wird diskutiert. Das Stauchen kann entweder symmetrisch nach beiden Seiten vom Streifen oder unsymmetrisch nach einer Seite erfolgen. Verf. beschränkt seine Untersuchung auf eine Diskussion der Mechanik der Formänderung im symmetrischen Fall. Dabei wird angenommen, daß keine Kräfte in axialer Richtung ausgeübt werden. Die Schwierigkeit bei diesem Problem liegt an der Tatsache, daß der vollständige zeitliche Verlauf der Formänderung für jedes Element des Streifens berechnet werden muß. Dies rührt daher, daß das Verhältnis der Hauptspannungen in jedem Element des Streifens sich mit fortschreitender Formänderung ändert, indem eine Beziehung zwischen Spannungs- und Dehnungsänderung nur während einer kleinen Ausdehnung des Loches besteht und nicht zwischen Spannungen und totaler Formänderung. Verf. gibt eine Zusammenfassung einer unveröffentlichten rechnerischen Untersuchung dieses Falles von H. A. Bethe, wo die Bedingung des plastischen Fließens nach O. Mohr erfüllt ist. Verf. erläutert die fehlende Übereinstimmung in den gemachten Annahmen und verbessert die Berechnung bei Anwendung der Fließbedingung von R. von Mises. Der zeitliche Verlauf der Formänderung wird auf dieser neuen Grundlage verfolgt und mit den Ergebnissen von Bethe verglichen. Bezeichnet b den Halbmesser des Loches zu einer beliebigen Zeit, sind die Formänderungen elastisch im Gebiet mit Radius $r > 3,64b$, plastische Formänderungen sind als sehr klein im ringförmigen Gebiet $2,21b < r < 3,64b$ anzusehen, während im inneren Ringgebiet $b < r < 2,21b$ endliche Formänderungen vorkommen. Am Rande des Loches ergibt die Berechnung eine Zunahme der Plattendicke auf das 2,6-fache der ursprünglichen Dicke. — Versuche mit Kreislöchern, hervorgebracht in Bleiplatten durch einen rotierenden und gut geschmierten konischen Dorn, mit einem Öffnungswinkel von 3° , zeigen, daß die symmetrische Formänderung, wie in der Berechnung des Verf. vorausgesetzt, nur auftritt, so lange der Lochdurchmesser das sieben- bis zehnfache der Plattendicke nicht überschreitet. Von diesem Zustand der Formänderung an biegt die Platte unsymmetrisch nach einer Seite aus ihrer Ebene heraus. Diese Verbiegung rührt nicht von einem axialen Druck des Dornes her, weil die Platte bei den Versuchen sich manchmal gegen das dicke Ende des Dornes und manchmal davon weg verbog. Berechnung der Formänderungsenergie zeigte, daß die symmetrische Form zu ihrer Formänderung acht drittel mal mehr Arbeit erfordert als die unsymmetrische. *Gran Olsson* (Trondheim).

Hill, R.: The plastic yielding of notched bars under tension. *Quart. J. Mech. appl. Math.*, Oxford **2**, 40—52 (1949).

Es wird der Spannungszustand im Kern eines tief eingekerbten Stabes beim Beginn eines ausgesprochen plastischen Fließens untersucht. Solange die Spannungen die Fließgrenze nicht erreicht haben, wird das Material der Kerbe als fest und das ebene plastische Fließen sofort nach Erreichen der Fließgrenze als voll entwickelt angenommen. Nach einer allgemeinen Erörterung des Problems wird der praktisch wichtige Fall einer tiefen Kerbe mit halbkreisförmiger Abrundung im einzelnen behandelt. Die Beziehungen der vorliegenden Aufgabe zum Problem

des Eindringens eines flachen Stempels ins Material werden diskutiert, wobei beim Vergleich auf eine diesbezügliche Arbeit von L. Prandtl eingegangen wird [Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-physik. Kl. 1920, 74]. *Gran Olsson* (Trondheim).

Swida, W.: Die elastisch-plastische Biegung des krummen Stabes unter Berücksichtigung der Materialverfestigung. Ingenieur-Arch. 17, 343—352 (1949).

Die elastisch-plastische Biegung wird unter der Annahme einer Werkstoffverfestigung durchgeführt und in der Weise idealisiert, daß sich das Spannungs-Dehnungsdiagramm stetig aus zwei Stücken von geraden Linien mit zwei verschiedenen Neigungen $\operatorname{tg} \alpha = E$ und $\operatorname{tg} \alpha_1 = E_1 (< E)$ zusammensetzt. Unter den üblichen vereinfachenden Annahmen (Ebenbleiben der Querschnitte und Nichtberücksichtigung der Querkontraktion) wird bei reiner Biegung die Spannungsverteilung und das Biegemoment für symmetrische Querschnitte ermittelt. Ausführung für Rechteckquerschnitte. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Sauer, Robert: Über die Gleitkurvennetze der ebenen plastischen Spannungsverteilungen bei beliebigem Fließgesetz. Z. angew. Math. Mech. 29, 274—279 (1949).

Im Anschluß an die vom Ref. (dies. Zbl. 30, 376) angegebene allgemeine Lösung des ebenen Plastizitätsproblems zeigt Verf., wie sich der gleiche Sachverhalt auch mit Hilfe der Charakteristikenmethode analog den Mach-Netzen der ebenen wirbelfreien Überschallströmungen darstellen läßt. *H. Neuber* (Dresden).

Friedlander, F. G.: On the total reflection of plane waves. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 376—384 (1948).

Verf. untersucht Reflexions- und Beugungsvorgänge, welche bei ebenen Transversalwellen an einer parallel zur Polarisationsrichtung orientierten Begrenzungsebene des elastischen Mediums auftreten, wenn der Einfallswinkel den kritischen Wert erreicht. Die gewöhnliche Schlußweise, welche zu einer Aufspaltung in Reflexions- und Beugungswelle und infolge der Randbedingung zum Brechungsgesetz führt, liefert eine Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle längs der Randebene, welche größer ist als jede der beiden Wellengeschwindigkeiten (a bzw. a'). Für den kritischen Einfallswinkel wird $c = a$. Eine Überschreitung des kritischen Einfallswinkels würde $c < a$ bedingen, was nicht mehr mit der elementaren Beugungstheorie vereinbar ist. Verf. setzt die elastische Verschiebungskomponente in diesem Falle gleich einer harmonischen Funktion $h(\xi, \eta)$ mit $\xi = t - x/c$, $\eta = y \sqrt{1/c^2 - 1/a^2}$. Hierdurch wird die Wellengleichung in die Laplacesche Gleichung der ξ, η -Ebene übergeführt. An Hand eines Beispiels zeigt Verf., daß die ins andere Medium übertragene Welle im wesentlichen umgekehrt proportional dem Abstand von der Begrenzungsebene abklingt. Ähnliche Rechnungen werden für elektromagnetische Wellen durchgeführt. Schließlich zeigt Verf. für die längs der Oberfläche eines elastischen Mediums laufenden Wellen die Existenz der Rayleighschen Lösung auf anderem Wege. *H. Neuber* (Dresden).

Spence, R. D.: The diffraction of sound by circular disks and apertures. J. acoust. Soc. America 20, 380—386 (1948).

Eine strenge Theorie der Beugung ebener Schallwellen, welche senkrecht auf eine Kreisscheibe bzw. auf eine kreisförmige Öffnung in einem ebenen Schirm auftreffen, wird entwickelt. Die gesamte gestreute bzw. durchgelassene Intensität wird für $2\pi a < 5\lambda$ (a = Kreissradius, λ = Wellenlänge) numerisch berechnet. Die mathematische Methode beruht auf der Separation der Wellengleichung in den Koordinaten des abgeplatteten Rotationsellipsoids. In der mathematischen Behandlung der dabei auftretenden Sphäroid-Funktionen unterscheidet sich diese Arbeit von der in den numerischen Ergebnissen etwas weitergehenden Arbeit von Bouwkamp (Dissertation, Groningen 1941). Die verwendeten Reihenentwicklungen der Sphäroid-Funktionen nach Potenzen von $1 - \eta^2$ bzw. nach Zylinderfunktionen mit halbzahligem Index $k + 1/2$, dividiert durch die $(k + 1/2)$ te Potenz des Arguments,

finden sich bereits bei Fisher (dies. Zbl. 17, 66); neu ist der Übergang zwischen diesen Reihenentwicklungen durch eine der bekannten Integralbeziehungen zwischen Sphäroid-Funktionen.

J. Meixner (Aachen).

Richter, G.: Über den Energiestrom im Schallfeld flüssiger Medien. Z. Physik 125, 98—107 (1948).

Bei der Betrachtung der akustischen Energieströmung in einem Kontinuum ist zu unterscheiden zwischen dem Energiestrom durch eine an die Materie fixierte und mit ihr bewegte Fläche und dem Energiestrom durch eine im Raum feste Fläche. In einem flüssigen Medium ist die (vektorielle) Energiestromdichte durch eine mitbewegte Fläche $\mathfrak{S}^* = p \mathfrak{v}$ (p = Druck, \mathfrak{v} = Strömungsgeschwindigkeit) und die Energiestromdichte durch eine raumfeste Fläche $\mathfrak{S} = p \mathfrak{v} + E \mathfrak{v}$ (E = Energiedichte = kinetische plus potentielle Energie pro Volumeneinheit). Im letzteren Fall tritt also der mit der Materie konvektiv bewegte Energiestrom $E \mathfrak{v}$ dazu. Bei den in der Akustik schwacher Schallwellen üblichen Vernachlässigungen wäre $|E \mathfrak{v}| \ll |p \mathfrak{v}|$. Verf. untersucht die beiden Anteile von \mathfrak{S} für eine ebene Schallwelle in einer Flüssigkeit, bei welcher Druck und Deformation exakt durch ein lineares Gesetz verknüpft sind. \mathfrak{S} und \mathfrak{v} haben dann nur je eine Komponente S und v in Fortpflanzungsrichtung der Welle, und es ergibt sich $p v = \varrho_0 c v^2$; $E v = \varrho v^3$ (c = Fortpflanzungsgeschwindigkeit, ϱ_0 Dichte des undeformierten Mediums, ϱ Dichte in der Schallwelle). Bei einer periodischen Welle läßt sich der zeitliche Mittelwert des konvektiven Energiestroms $E \mathfrak{v} = \overline{\varrho v^3}$ umformen in $\overline{E \mathfrak{v}} = \varrho_0 v^{*3}$, wo v^{*3} den Mittelwert auf mitbewegter Fläche bedeutet. $\overline{E \mathfrak{v}}$ verschwindet also nur dann, wenn v^* , die Geschwindigkeit eines bei seiner Bewegung verfolgten Teilchens, einen zeitlich symmetrischen Verlauf bezüglich des Wertes null aufweist, wie z. B. bei einer Sinusschwingung.

A. Schoch (Göttingen).

Bergmann, Ludwig: Eigenschwingungen von Glaszylindern. Z. Physik 125, 405—417 (1949).

Die Sichtbarmachung der Eigenschwingungen von Glaszylindern mit Hilfe des elastooptischen Effekts wird beschrieben. Die Glaszylinder werden längs einer Mantellinie mit Ultraschall angeregt und parallel zur Achse mit polarisiertem Licht zwischen gekreuzten Nikols durchleuchtet. Gebiete anisotropen Spannungszustands erscheinen dann aufgehellt. Die zahlreichen wiedergegebenen Aufnahmen zeigen die Vielfalt der auftretenden „Klangfiguren“. — Die beobachteten rein radialen Schwingungen (bei denen also nur Knotenkreise sichtbar sind) werden mit der Theorie der rein radialen Schwingungen in unendlich langen Zylindern (Airy) verglichen. Es handelt sich bei diesen Schwingungen um stehende Dichtewellen. Die radiale Teilchenverschiebung u ist durch $u = J_1(kr) e^{i\omega t}$ dargestellt [r = Abstand von der Mittelachse, $k^2 = \omega^2 \varrho / (\lambda + 2\mu)$, ω = Kreisfrequenz, ϱ = Dichte, λ, μ Lamésche Elastizitätskonstanten]. Die Randbedingung der Spannungsfreiheit an der Oberfläche $r = R$ liefert die Gleichung

$$(kR) J'_1(kR) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} J_1(kR) = 0,$$

aus deren Wurzeln kR die Eigenfrequenzen folgen. Knotenlinien der elastischen Doppelbrechung sind dort, wo radiale und tangentielle Dehnung gleich sind:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{(r+u) \frac{d\varrho}{dr} - r \frac{d\varrho}{dr}}{r \frac{d\varrho}{dr}} = \frac{u}{r}, \quad \text{d. h. } J'_1(kr) = \frac{J_1(kr)}{kr} \quad \text{oder} \quad J_2(kr) = 0.$$

Die hieraus berechneten Radien der Knotenkreise stimmten, ebenso wie die Eigenfrequenzen, befriedigend mit den beobachteten Werten überein. A. Schoch.

Stenzel, H.: Über die Berechnung des Schallfeldes von kreisförmigen Membranen in starrer Wand. Ann. Physik, VI. S. 4, 303—324 (1949).

Ist eine schwingende ebene Membran (Fläche F) von einer starren Ebene umrahmt und ist $w(\varrho) \exp(-i\omega t)$ die normal zur Ebene gerichtete Schnelle der

Membran (ϱ, φ Polarkoordinaten in der Membranebene, $\omega =$ Kreisfrequenz), dann ist die Schalldruckamplitude in einem Aufpunkt nach Rayleigh darstellbar durch

$$(1) \quad p = -\frac{i k c \sigma}{2\pi} \int_{\vec{F}} w(\varrho) \frac{e^{i k R}}{R} dF,$$

wo R der Radiusvektor vom Flächenelement dF zum Aufpunkt ist (die Proportionalitätsfaktoren sind: $\sigma =$ Dichte, $c =$ Schallgeschwindigkeit des Mediums, $k = 2\pi/\lambda =$ Wellenzahl). Nach Einführung der mittleren Membranschnelle w_m auf F , des Radiusvektors r vom Mittelpunkt der kreisförmigen Membran zum Aufpunkt und des Winkels γ von r gegen die Normale der Membran läßt sich (1) als Produkt einer isotropen Kugelwelle mit einem dimensionslosen, abstands- und richtungsabhängigen Faktor $\Re(r, \gamma)$ schreiben:

$$p = -i k c \sigma w_m F \frac{e^{i k r}}{2\pi r} \Re(r, \gamma); \quad \Re(r, \gamma) = \frac{1}{w_m F} \int_{\vec{F}} w(\varrho) \frac{e^{i k (R-r)}}{R/r} dF.$$

Für eine „Kolbenmembran“ [$w(\varrho) = \text{const.}$] lassen sich $\Re(\infty, \gamma)$ und $\Re(r, 0)$, d. h. der Druckverlauf im „Fernfeld“ und auf der Symmetrieachse, ohne Schwierigkeit berechnen. Für beliebige Aufpunkte waren schon früher von Backhaus und Stenzel Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen für $\Re(r, \gamma)$ angegeben worden, die jedoch bei größeren ka ($a =$ Membranradius) und kr wegen zu langsamer Konvergenz für die numerische Berechnung des Amplitudenfeldes unbrauchbar werden. Verf. stellt nun 3 weitere Reihenentwicklungen für $\Re(r, \gamma)$ auf, die in sich gegenseitig ergänzenden Aufpunktsbereichen geeignet sind, nämlich die erste im Bereich $a < r < \pi a^2/\lambda$, $\gamma \leq 45^\circ$ (nach Potenzen von $\sin^2 \gamma$ fortschreitend; Koeffizienten Funktionen von r), die zweite im Bereich $a < r < \pi a^2/\lambda$, $\gamma \geq 45^\circ$ (nach Potenzen von $\cos^2 \gamma$ fortschreitend; Koeffizienten Funktionen von r) und die dritte im Bereich $\pi a^2/\lambda < r$, γ beliebig (nach Potenzen von $1/kr$ fortschreitend; Koeffizienten Funktionen von γ). Die Koeffizienten aller drei Reihenentwicklungen ergeben sich dabei aus $\Re(\infty, \gamma)$ oder $\Re(r, 0)$ durch Differentialoperationen. Das erste Glied der ersten bzw. dritten Reihe ist $\Re(r, 0)$ bzw. $\Re(\infty, \gamma)$. — Die Ergebnisse sind auch auf die allgemeinere Membranschwingungsform $w(\varrho) = [1 - (\varrho/a)^2]^{p-1}$ anwendbar (p ganz).
Schoch (Göttingen).

Hydrodynamik:

Bilharz, Herbert: Zur Theorie der tragenden Linie mit periodischer Zirkulation. Z. angew. Math. Mech. **29**, 311—317 (1949).

Für einen unendlich breiten Flügel mit der periodischen Anstellwinkelverteilung

$$\alpha(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi y}{l} + b_n \sin \frac{n\pi y}{l} \right)$$

ergibt sich als (auf die Tiefe bezogene) Zirkulationsverteilung:

$$\gamma(y) = \pi V \left\{ \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi y}{l} + B_n \sin \frac{n\pi y}{l} \right) \right\}$$

mit $A_0 = a_0$, $A_n = \frac{a_n}{1 + \pi n^2/4l}$, $B_n = \frac{b_n}{1 + \pi n^2/4l}$ und als Beiwert des Auftriebs bzw.

des induzierten Widerstandes $c_a = 2\pi \cdot a_0/2$, $c_w = \frac{\pi^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n (A_n^2 + B_n^2)$. Das Abwindfeld $w(x, y)$ in der Flügelebene läßt sich ebenfalls explizit als Fourierreihe in y schreiben, wobei in den von x abhängigen Koeffizienten modifizierte Besselsche Funktionen zweiter Art auftreten. Zwei Beispiele [$\alpha = c_0 + c_1 \cos(\pi y/l)$; α abteilungsweise konstant] werden zahlenmäßig durchgerechnet und die Resultate in Schaubildern wiedergegeben.
Weissingen (Hamburg).

Reissner, Eric: Note on the theory of lifting surfaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 208—215 (1949).

Verf. untersucht die stationäre Bewegung einer rechteckigen tragenden Fläche von endlicher Spannweite in einer inkompressiblen Strömung. Ausgehend von der vollständigen Integralgleichung der linearisierten Theorie für einen Rechteckflügel macht er den Übergang zur Theorie der tragenden Linie unter Berücksichtigung eines in der Prandtlschen Theorie vernachlässigten Zusatzgliedes. Es ergibt sich auf diese Weise eine durchsichtigere Ableitung der auf J. Weissinger (1942) zurückgehenden Verbesserung der Prandtlschen Theorie der tragenden Linie. Die Integralgleichung der tragenden Linie für die Auftriebsverteilung wird sodann auf ein simultanes System zweier Integralgleichungen für die Auftriebs- und Momentenverteilung verallgemeinert. Es werden hierfür Lösungsverfahren, auch unter Benutzung von Näherungen, angegeben. Durch diese Verallgemeinerung werden gewisse Schwierigkeiten verringert, die bei der Theorie der tragenden Linie und auch bei der Weissingerschen Verbesserung an den Flügelenden auftreten. Ferner kann beispielsweise das Problem eines Tragflügels endlicher Spannweite jetzt behandelt werden, bei dem zwar der Auftrieb, aber nicht das Moment verschwindet. *Wuest.*

Berker, Ratip: Sur l'énergie cinétique d'un fluide visqueux incompressible occupant un domaine spatial borné. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1327—1329 (1949).

Es wird nachgewiesen, daß bei einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit, die räumlich durch feste Wände begrenzt ist, die kinetische Energie mindestens exponentiell mit der Zeit abnimmt, und das logarithmische Dekrement (der Majorante) berechnet. Die gleiche Aussage ist etwa gleichzeitig und unabhängig davon von J. Kampé de Fériet [Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Ser. 63, No. 1, 36—45 (1949)] gemacht worden, der 1946 bereits das ebene Problem behandelt hatte. *Wuest.*

Abramowitz, Milton: On backflow of a viscous fluid in a diverging channel. J. Math. Physics, Massachusetts 28, 1—21 (1949).

Die vorliegende Arbeit behandelt die Ablösung einer ebenen laminaren Strömung in einem divergenten Kanal. Im Gegensatz zu älteren Untersuchungen von H. Blasius (1910) wird aber nicht nur der Grenzwinkel des Diffusors bestimmt, bei dem Rückströmung zu erwarten ist, sondern auch die Stelle der Ablösung. Als Anfangsbedingung ist beim Eintritt in den Diffusor eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung vorgegeben, wie sie sich nach einer längeren Anlaufstrecke mit parallelen Wänden einstellt. Verf. entwickelt die Stromfunktion nach Potenzen von $\varepsilon = Rm$, wobei $R = Ua/\nu$ (U größte Geschwindigkeit des parabolischen Geschwindigkeitsprofils, a Entfernung der Wände bei Beginn des Diffusors) die Reynoldssche Zahl und m den Neigungstangens des Diffusors bezeichnet. Bei Vernachlässigung höherer als quadratischer Glieder in ε ergibt sich nach umfangreicher Rechnung als Bedingung für die Rückströmung an der Wand

$$1 - \{8/105 - 0,0524 \exp(-28,22 \xi/aR)\} \varepsilon - 0,003474 \varepsilon^2 = 0.$$

Die unterstrichenen Glieder entsprechen der Blasius'schen Rechnung, während ξ die Entfernung vom Beginn des Diffusors bezeichnet. Für $\xi = \infty$ erhält man den Grenzfall $\varepsilon = 9,24$, für $\xi = 0$ ergibt sich $\varepsilon = 15$, jedoch ist hier die Lösung streng genommen nicht mehr gültig. *Wuest* (Göttingen).

Helmhold, H. B.: Zur Berechnung des Profilwiderstandes. Ingenieur-Arch. 17, 273—279 (1949).

Der Profilwiderstand ist proportional zur Summe der beiden Impulsverlustdicken ϑ_∞ weit hinter dem Profil, herrührend von der Grenzschichtströmung an der Oberseite des Profils einerseits und an der Unterseite andererseits. Sein Beiwert ist $c_{wp} = 2\Sigma \vartheta_\infty/L$, L = Profillänge. Zur Berechnung von ϑ_∞ muß man kennen die laminare Grenzschichtströmung vom Staupunkt bis zum Umschlagpunkt x_u (x = Wandbogenlänge), die turbulente Strömung von x_u bis zur Hinterkante x_H

und die Nachlaufströmung von x_H bis $x = \infty$. Diese Rechnung wird unter der Annahme einparametrischer Grenzschichtprofile mit Hilfe gewisser empirischer Konstanten nach bekannten Methoden durchgeführt. Da die Zahlenwerte dieser Konstanten nur ungefähr bekannt sind, kann man sie so wählen, daß die im Resultat zunächst noch auftretende schwer erfaßbare Potentialgeschwindigkeit U_H an der Hinterkante wieder herausfällt. So ergibt sich für Reynolds-Zahlen \Re von der Größenordnung $2 \cdot 10^6$ die Formel

$$c_{wp} = \sum \left\{ c_{fl} \frac{U_u}{U_\infty} \sqrt{\int_0^{\xi_u} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{4,0} d\xi} + \bar{c}_{fl} \int_{\xi_u}^{\xi_H} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{3,5} d\xi \right\},$$

in der $c_{fl} = 1,328/\sqrt{R}$ die Blasius'sche Reibungszahl einer ebenen Platte der Länge L , $\bar{c}_{fl} \approx 0,0040$ eine mittlere Reibungszahl für den Turbulenzteil, U die Potentialgeschwindigkeit und $\xi = x/L$ ist. Bei kleineren \Re , bei denen die Umschlagstelle x_u nicht mit der Lage x_m des Geschwindigkeitsmaximums zusammenfällt, lautet die Formel

$$c_{wp} = \sum \left\{ c_{fl} \sqrt{\frac{U_u}{U_\infty} \left(\frac{U_{\max}}{U_\infty} \int_0^{\xi_m} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{4,0} d\xi + \int_{\xi_m}^{\xi_u} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{5,0} d\xi \right)} + \bar{c}_{fl} \int_{\xi_u}^{\xi_H} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{3,5} d\xi \right\}.$$

Weissinger (Hamburg).

Calder, K. L.: Eddy diffusion and evaporation in flow over aerodynamically smooth and rough surfaces: a treatment based on laboratory laws of turbulent flow with special reference to conditions in the lower atmosphere. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 153—176 (1949).

Verf. knüpft an das von L. Prandtl gefundene Gesetz, nach dem beim Strömen über eine raue Fläche die mittlere Geschwindigkeit einer Schicht proportional dem Logarithmus ihres Abstandes von der Fläche ist, an. Die besonderen Formen dieses Gesetzes für glatte und raue Oberflächen werden unter Einführung des Rauigkeitsparameters und der „Nullpunktverschiebung“ hingeschrieben. Da ihre Verwendung bei den weiteren Rechnungen unüberwindliche Schwierigkeiten ergibt, werden sie durch angenähert gültige Potenzgesetze ersetzt, wobei der Proportionalitätsfaktor und der Exponent zunächst zahlenmäßig nicht festgelegt werden. — Diese im Laboratorium geprüften Gesetze werden nun auf atmosphärische Verhältnisse unter adiabatischen Bedingungen angewandt und Beobachtung und Berechnung verglichen. Ausführliche neuere Messungen über verschiedenartigen Grasflächen haben gezeigt, daß die Windgeschwindigkeitsprofile in den untersten Dekametern der Atmosphäre unter adiabatischen Bedingungen mit großer Genauigkeit durch das logarithmische Gesetz für raue Oberflächen dargestellt werden können. — Der Angelpunkt in den weiteren Gedankengängen ist die Herleitung einer Beziehung des Koeffizienten der turbulenten Diffusion (eddy diffusivity) zu den Bestimmungsgrößen des Potenzgesetzes auf Grund der Scherungskräfte turbulenter Strömungen, Gleichung 15. — Mit dieser Beziehung wird die Differentialgleichung der Diffusion von Masse (Rauch) aus einer unbegrenzten, linienhaften Quelle gelöst. Hierbei wird eine Höhe H der Diffusionswolke als Abstand von der Oberfläche $z = 0$ von dem Punkte, an dem die Konzentration auf $1/10$ des Oberflächenwertes gefallen ist, definiert. Auf Grund von Messungen werden dann mit Hilfe der durch die Lösung erhaltenen Beziehungen der Proportionalitätsfaktor und der Exponent des Potenzgesetzes beim Strömen über eine glatte Oberfläche zu 11,9 bzw. 0,095 bestimmt, während nach dem älteren Gesetz von Blasius die Werte 8,74 und $1/7$ sind. Weiter wird dann der Einfluß von verschiedenartigen Grasflächen auf die turbulente Diffusion von Masse untersucht. — Der letzte Abschnitt ist der Verdunstung über glatten und rauen Oberflächen endlicher Ausdehnung in Windrichtung gewidmet. Auch hier führt die Gleichung 15 zu einer besonderen Form der Diffusionsgleichung der Konzentration des Wasserdampfes. Verf. gelingt es, sie in eine Integralgleichung der Abelschen Art überzuführen. Die Lösung wird dem Werke von E. T. Whittaker und G. N. Watson „A course of modern analysis“ (Cambridge, 1935) entnommen. Aus ihr ergeben sich Ausdrücke für die gesamte Verdunstung je Einheitsbreite des Verdunstungsstreifens senkrecht zum Wind und für die Dampfkonzentration in einem Punkt über dem Streifen. Aus der durchgeführten Analyse des zweidimensionalen Verdampfungsproblems kann geschlossen werden, daß die gegebene Formulierung der Gesetze des turbulenten Transportes sowohl die Verdunstung über aerodynamisch glatten Oberflächen in Windkanalexperimenten als auch die Verteilung der Konzentration über sehr viel größeren aerodynamisch rauen Oberflächen einer adiabatischen Atmosphäre befriedigend darstellen kann.

B. Neis (Berlin).

Roy, Maurice: Sur la propulsion par régénération de la couche-limite. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 940—943 (1948).

Verf. weist darauf hin, daß man auf Grund von Energie-Impulsbetrachtungen nicht unbedingt einen Gewinn an Antriebsleistung durch Beeinflussung der Grenzschicht vorhersagen kann. *Weissinger* (Hamburg).

Schubart, Hans: Transformation der Grenzschichtgleichung bei dem Problem des schräg angeblasenen Zylinders durch Anwendung von Funktionaldetermination. Z. angew. Math. Mech. **29**, 253—254 (1949).

Mit Hilfe des Gesamtdruckes $G = p + \frac{1}{2} \rho u^2$ und der Stromfunktion $\psi(x, y)$ läßt sich die zweidimensionale Grenzschichtströmung bekanntlich beschreiben durch eine Gleichung $G_x = \text{const.} \cdot u \cdot G_{\psi\psi}$ vom Typ der Wärmeleitungsgleichung. Bei Schräganblasung kommt zu den Geschwindigkeitskomponenten u, v , die sich wie im zweidimensionalen Fall berechnen, noch eine Komponente w parallel zur Zylinderachse. Verf. zeigt, daß auch $w = H_\psi$ aus einer Wärmeleitungsgleichung $v \psi_y H_{\psi\psi} = H_x$ bestimmt werden kann (v = kinematische Zähigkeit). *Weissinger*.

Viguier, M. G.: Les forces tangentielles de viscosité avec gradients de vitesse élevés. Experimentia, Basel **5**, 397—398 (1949).

Der Newtonsche Ansatz für die Schubspannung, der eine lineare Abhängigkeit von der Deformationsgeschwindigkeit vorsieht, ist nach Ansicht des Verf. bei starkem Druckgefälle, also insbesondere in Grenzschichten, nicht mehr streng gültig. Bei Berücksichtigung von Gliedern dritten Grades im Schubspannungsansatz glaubt der Verf. für die Plattengrenzschicht eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden zu erzielen. *Wuest* (Göttingen).

Unna, P. J. H.: Speed of wave energy. Nature, London **164**, 887—888 (1949).

Im Anschluß an Sverdrup und Munk [„Wind, sea and swell“, Publ. 601, 7, Hydrographic Office, USA (1947)] wird der Ausdruck für die Gruppengeschwindigkeit von Wellen hergeleitet, der in den bekannten Rayleighschen $U = V - \lambda \frac{\partial V}{\partial \lambda}$ übergeht. Es wird gezeigt, warum für Meereswellen U zwischen $V/2$ und V schwankt, konform mit dem Verhältnis d/λ von Tiefe zu Wellenlänge. *Hardtwig* (München).

Ursell, F.: On the rolling motion of cylinders in the surface of a fluid. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **2**, 335—353 (1949).

Verf. untersucht die durch die rollende Bewegung zylindrischer, an der Flüssigkeitsoberfläche schwimmender Körper hervorgerufene ebene Potentialströmung mit Hilfe der konformen Abbildung. Für die rollende Bewegung wird der Drehwinkel des Schwimmkörpers als Sinusschwingung angesetzt, wodurch die Stromfunktion in zwei ebene Potentialfunktionen zerfällt, von denen die eine mit $\sin(ft)$, die andere mit $\cos(ft)$ behaftet ist (f Frequenz). Die weitere Rechnung wird unter Voraussetzung kleiner Drehwinkel durchgeführt und zeigt, daß die hervorgerufenen Flüssigkeitswellen hinsichtlich ihrer Amplitude und des Dämpfungsdekrementes wesentlich von den Querschnittsabmessungen abhängen. *H. Neuber* (Dresden).

Kennard, E. H.: Generation of surface waves by a moving partition. Quart. appl. Math. **7**, 303—312 (1949).

Es werden ebene Wellenbewegungen in halbbunendlichen Flüssigkeitskörpern mit freier Oberfläche betrachtet, die durch Verschiebung der Begrenzung erregt werden. Es sei der erste Quadrant der x, y -Ebene der (ebene) Flüssigkeitskörper, die $+x$ -Achse die freie Oberfläche, die in Richtung der Schwerkraft orientierte $+y$ -Achse die vertikale Wand, auf der die Wellenbewegung erzeugt wird. Ist auf der letzteren $s = SF(y, t)$ mit $F(y, 0) = 0$ die vorgegebene infinitesimale horizontale Verrückung, so ist eine Lösung $\Phi(x, y, t)$ (das Geschwindigkeitspotential) der Gleichung $\Delta\Phi = 0$ gesucht mit $\partial\Phi/\partial x = -\partial s/\partial t$ für $x = 0$ und $\eta = g^{-1} \partial\Phi/\partial t$, $\partial\eta/\partial t = \partial\Phi/\partial y$ für $y = 0$ (η die Auslenkung der freien Oberfläche, g die Schwerkbeschleunigung). Die Funktionen $\Phi(x, y, t)$ und $\eta(x, t)$ werden ex-

plizite angegeben und in dem harmonischen Spezialfall $s = Sf(y) \sin \omega t$ eingehend diskutiert. — Der dann noch behandelte Fall einer entsprechenden Flüssigkeitsmasse endlicher Tiefe läßt sich im Prinzip auf den ersten Fall zurückführen.

Maruhn (Dresden).

Merbt, H. und H. Billing: Der Propeller als rotierende Schallquelle. *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 301—311 (1949).

Ausgehend von der für das Geschwindigkeitspotential der Strömung um einen verhältnismäßig dicken, nicht angestellten Flügel geltenden Wellengleichung, welche bei Berücksichtigung der Kreisbewegung analog der klassischen Wellengleichung d'Alemberts inhomogen wird, wird unter Verwendung der Poissonschen Lösung unter entsprechenden, für die mit konstanter Geschwindigkeit umlaufende Quelle geltenden Umformungen die Potentialfunktion für die Ausbreitung des Luftschraubenschalles gewonnen. Da sich sowohl die Zirkulation, die Vorwärtsbewegung, wie auch der Anstellwinkel des Propellerblattes leicht berücksichtigen lassen, gelangen die Verf. zu Endformeln, welche die Berechnung des Schallfeldes aus den geometrischen Abmessungen, dem Anstellwinkel, der Drehzahl und dem Fortschrittsgrad der Luftschrauben ermöglichen.

H. Neuber (Dresden).

Helmbold, H. B.: Über den durch einen Verdichtungsstoß verursachten Zusatzantrieb. *Ingenieur-Arch.* **17**, 280—287 (1949).

Ein von L. Poggi 1932 begründetes Näherungsverfahren zur Berechnung kompressibler Strömungen wird vom Verf. auf Gasströmungen mit zur Richtung der Stromlinien senkrechtem Verdichtungsstoß schwacher Intensität angewandt. Bei diesem Verfahren wird die kompressible Strömung durch Einführung von Zusatzquellen und -senken kinematisch auf eine inkompressible Strömung zurückgeführt und der Verdichtungsstoß als eine flächenhafte Konzentration von Kompressions-senken dargestellt, mit welcher ein System räumlich verteilter Expansionsquellen entgegengesetzt gleicher Gesamtergiebigkeit verbunden ist. Bei der Anwendung dieses Verfahrens auf das ebene Problem des Tragflügels mit örtlichem Überschallbereich wird der dabei auftretende Verdichtungsstoß näherungsweise durch eine Punktquelle ersetzt und der auftriebsvermindernde Einfluß der Expansionsquellen nach der Stromlinienanalogie abgeschätzt. Es gelingt damit dem Verf., den bereits durch die Göthertschen Versuche 1945 nachgewiesenen Zusammenhang zwischen Zusatzantrieb und Verdichtungsstoß auch theoretisch zu begründen. *Wuest.*

Lighthill, M. J.: The position of the shock-wave in certain aerodynamic problems. *Quart. J. Mech. appl. Math.*, Oxford **1**, 309—318 (1948).

Verf. entwickelt eine Näherungstheorie für mehrere nur von einer Veränderlichen abhängige Probleme kompressibler Strömungen mit Verdichtungsstößen. Die Stoßstärke wird dabei als klein vorausgesetzt, jedoch gehen die Vernachlässigungen in den Bewegungsgleichungen nicht so weit wie bei einer linearisierten Theorie, so daß sich auch erste Näherungen für die Stoßstärke ergeben. Insbesondere wird die gleichförmige Ausdehnung eines Zylinders und einer Kugel in ruhender Luft und der kegelige Verdichtungsstoß behandelt. Es wird auch gezeigt, welches die korrekten Näherungen für den Druck an der Oberfläche eines Kegels sind, und verschiedene Unstimmigkeiten bei der von Taylor und Maccoll (1933) berechneten Kegelströmung finden ihre Aufklärung.

Wuest (Göttingen).

Sauer, R.: Stoßwellen in der eindimensionalen nichtstationären Gasströmung. *Helvetica physica Acta* **22**, 467—472 (1949).

Eindimensionale, nichtstationäre Gasströmungen mit abschnittsweise konstanten Zustandswerten können mit Hilfe der „stationären Stoßpolaren“ auf sehr einfache Weise diskutiert werden, wie vom Verf. bereits 1943 in einer wenig zugänglichen Arbeit gezeigt wurde. Hierbei werden die bekannten Stoßgleichungen, durch welche die unstetige Änderung der Gasgeschwindigkeit u und die unstetigen Anstiege der Schallgeschwindigkeit a und des Druckes p in Abhängigkeit von der

Größe $\omega = c/a$ (c Stoßgeschwindigkeit relativ zum Gas) gegeben ist, in einer u, a -Zustandsebene mit $(\dot{u} - u)/a$ und \dot{a}/a als rechtwinklige Koordinaten dargestellt ($\dot{u}, \dot{a}, \dot{p}$ Größen nach dem Stoß). Die Stoßpolare ist mit Skalen für ω und \dot{p}/p versehen. Als Beispiele werden die Reflexion eines Stoßes an einem geschlossenen und offenen Rohrende, das Durchkreuzen und Einholen zweier Verdichtungsstöße, der Druckausgleich und die Entstehung eines Verdichtungsstoßes aus einer adiabatischen Verdichtungswelle behandelt.

Wuest (Göttingen).

Cabannes, Henri: Écoulement potentiel discontinu d'un fluide parfait compressible. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 510—511 (1949).

Wenn eine nichtparallele, jedoch wirbelfreie Überschallströmung einen Verdichtungsstoß erleidet, ist die Strömung hinter dem Verdichtungsstoß nur dann wirbelfrei, wenn die Stoßfront einen solchen Verlauf hat, daß die Entropieänderung längs des Stoßes konstant ist. Die Differentialgleichung für diesen Stoß wird abgeleitet und auf die Tollmienschen spiralförmigen Strömungen angewandt. Es ergibt sich, daß die Strömung hinter dem Stoß ebenfalls spiralförmig ist.

Wuest (Göttingen).

Prim III, R. C.: A note on the substitution principle for steady gas flow. J. appl. Physics; Lancaster Pa. **20**, 448—450 (1949).

Das von M. Munk und R. Prim 1947 für Gase mit konstanten spezifischen Wärmen aufgestellte Substitutionsprinzip hat seinen Hauptwert darin, daß man Gasströmungen mit nichtverschwindender Rotation, insbesondere also Strömungen hinter gekrümmten Stoßfronten auf isentropische Strömungen zurückführen kann. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Prinzip auf solche nichtidealen Gase ausgedehnt, deren Zustandsgleichung von der Form $\rho = P(p) S(s)$ ist, wobei s die spezifische Entropie bezeichnet. Die Bewegungsgleichungen können dann auf eine kanonische Form reduziert werden, die nur den reduzierten Geschwindigkeitsvektor und den Druck enthält. Explizit läßt sich der Druck aber nur dann eliminieren, wenn das Gas eine Zustandsgleichung von der Form $\rho = p^k S(s)$ hat, wobei $k < 1$. Schließlich wird noch eine Beziehung zwischen der Machschen Zahl und dem reduzierten Geschwindigkeitsfeld aufgestellt.

Wuest (Göttingen).

Holt, M.: The behaviour of the velocity along a straight characteristic in steady irrotational isentropic flow with axial symmetry. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **1**, 358—364 (1948).

Bei zweidimensionaler, wirbelfreier und isentropischer Überschallströmung ist längs einer geradlinigen Charakteristik die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung konstant. Bei räumlichen Überschallströmungen gilt dies im allgemeinen nicht mehr. Verf. stellt für axialsymmetrische Strömungen eine Beziehung zwischen dem Radius und der Größe und Richtung des Geschwindigkeitsvektors bei einer geradlinigen Charakteristik auf. Außer dem ausgearteten Fall einer gleichförmigen Parallelströmung entlang der Achse unterscheidet er fünf Strömungstypen, die sich aus der Bedingung ergeben, daß nur reelle Lösungen sinnvoll sind. In einigen dieser Fälle treten als charakteristisches Merkmal Grenzlinien auf.

Wuest (Göttingen).

Poritsky, H.: Polygonal approximation method in the hodograph plane. J. appl. Mech., New York **16**, 123—133 (1949).

Die Differentialgleichung für die Stromfunktion in einer kompressiblen Strömung kann durch die Molenbroek-Transformation in die Geschwindigkeitsebene übertragen und dadurch linearisiert werden. Nach Tschapligin (1904) kann diese transformierte Differentialgleichung auf die Laplacesche Differentialgleichung zurückgeführt werden, wenn man die Druck-Dichte-Funktion geradlinig approximiert. Eine naheliegende Erweiterung dieses Verfahrens besteht darin, die Zustandsgleichung durch einen geknickten Linienzug anzunähern. Im vorliegenden Bericht wird dieses Verfahren, das vom Verf. in seinen Grundzügen bereits auf dem 6. Internationalen Mechanikkongreß in Paris 1946 vorgetragen worden war, weiter aus-

gebaut. Von der Hodographenebene w, θ geht Verf. zu einer verzerrten Ebene r, θ über, die mit der komplexen Ebene identifiziert wird, wobei $r = K_i w / (\sqrt{C_i} + \sqrt{w^2 + C_i})$. Durch passende Wahl der Konstanten K_i kann man erreichen, daß die komplexe r, θ -Ebene stetig überdeckt wird, wobei den Polygonstrecken der angenäherten Druck-Dichte-Funktion jeweils Kreisringflächen r_i, r_{i+1} entsprechen. An den Grenzkreisen r_i sind die Ableitungen $\partial\varphi/\partial r$ und $\partial\psi/\partial r$ der Potential- und Stromfunktion unstetig, woraus man die Übergangsbedingungen zwischen den einzelnen Ringflächen erhält. Für die Behandlung von Singularitäten, wie Quellen, Senken und Wirbel, entwickelt Verf. ein Spiegelungsverfahren. Am Beispiel einer Punktquelle und eines Einzelwirbels wird die Rechnung zahlenmäßig durchgeführt und das Stromlinienbild in die physikalische Ebene wieder zurückübertragen. *Wuest* (Göttingen).

Meyer, R. E.: The method of characteristics for problems of compressible flow involving two independent variables. — I. The general theory. *Quart. J. Mech. appl. Math.*, Oxford 1, 196—219 (1948).

Dieser Bericht, der auf dem 6. Internat. Kongreß für angewandte Mechanik in Paris 1946 vorgetragen wurde, gibt einen Überblick über den gegenwärtigen Entwicklungsstand des Charakteristikenvorgangs zur Lösung von Problemen kompressibler Strömungen. Die Theorie bezieht sich auf ebene oder rotationssymmetrische stationäre Überschallströmungen oder instationäre kompressible Strömungen, die nur von einer Ortsveränderlichen abhängen. Die Wärmestrahlung, Wärmeleitung und Zähigkeit wird, abgesehen in Stoßfronten, vernachlässigt. Wirbelfreiheit wird dagegen nicht vorausgesetzt. Durch Verwendung verallgemeinerter orthogonaler Koordinaten ergibt sich eine besonders übersichtliche Herleitung der charakteristischen Gleichungen aus den Bewegungsgleichungen, wobei die enge Verknüpfung der grundlegenden mathematischen und physikalischen Eigenschaften der Charakteristiken besonders augenfällig wird. Als Linien, längs derer Unstetigkeiten der normalen Ableitungen vorkommen können, sondern sich die Machschen Linien und die Stromlinien ab, zwischen denen jedoch wesentliche Unterschiede bestehen. Dies führt weiterhin zu einem einfachen Beweis für die eindeutige Bestimmtheit der Lösungen. Das Prandtl-Busemannsche Näherungsverfahren für ebene, wirbelfreie und isentropische Gasströmungen erweist sich als Sonderfall eines viel allgemeineren, von Massau bereits 1900 angegebenen Integrationsverfahrens. Im letzten Abschnitt wird in ähnlicher Weise das instationäre Problem behandelt, wobei die Strömung eindimensional, zylinder- oder kugelsymmetrisch sein kann. In einer Zusatznotiz geht S. Goldstein auf die Rolle ein, welche die Achse für axialsymmetrische Probleme beim Massauschen Integrationsverfahren spielt. *Wuest*.

Meyer, R. E.: The method of characteristics for problems of compressible flow involving two independent variables. II. Integration along a Mach line. The radial focusing effect in axially symmetrical flow. *Quart. J. Mech. appl. Math.*, Oxford 1, 451—469 (1948).

Verf. behandelt das Anwachsen und Abklingen von Störungen längs Machscher Linien in isentropischer, wirbelfreier, stationärer zweidimensionaler oder axialsymmetrischer Überschallströmung. Dieses Problem führt auf eine gewöhnliche, nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung für die Krümmung der Machschen Linien und auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Divergenz und Konvergenz der Machschen Linien. Wegen der Schwierigkeiten des allgemeinen Falles erfolgt eine Spezialisierung auf geradlinige Machsche Linien. Das ebene Problem wird dadurch uninteressant, im axialsymmetrischen Fall wird man dagegen auf die Theorie des radialen fokussierenden Effektes geführt. Als Beispiel wird das Strömungsfeld beim Eintritt in einen konvergierenden Kanal von kreisförmigem Querschnitt berechnet und die analytischen Ausdrücke mit den numerischen Ergebnissen der linearen Theorie von Tupper verglichen. Aus dem „Fokussierungsgesetz“ folgt, daß die Anfangskrümmung der Wand des Überschalldiffusors begrenzt sein muß, wenn die Strömung stoßfrei vor sich gehen soll, was natürlich auch nur in einem bestimmten Bereich Machscher Zahlen möglich ist. Die Störung, die durch den Diffusoreintritt erzeugt wird, führt zu einer Singularität auf der Achse, und zwar an der Stelle, wo die betreffende Machsche Linie auf die Achse trifft. Die Art dieser Singularität wird im Rahmen einer linearen Theorie untersucht.

Wuest (Göttingen).

Roumien, Charles: Étude des régimes transitoires en aérodynamique supersonique à deux dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 56—57 (1949).

Verf. behandelt andeutungsweise das ebene Problem eines Tragflügels, der sich mit Überschallgeschwindigkeit bewegt und dessen Bewegung von einem bestimmten Zeitpunkt an gestört wird, wobei die Störungen als klein, aber nicht notwendig periodisch vorausgesetzt werden. *Wuest* (Göttingen).

Zerner, Frédéric: Sur les jets supersoniques plans. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 175—177 (1948).

Verf. untersucht die Bedingungen an den Grenzen eines ebenen Überschallstrahles. Er wendet dabei auf die Differentialgleichung für die Stromfunktion die Legendresche Transformation an und führt die Charakteristiken dieser transformierten Differentialgleichung als Koordinaten ein. Die transformierte Potentialfunktion wird auf dem Strahlrand durch sukzessive Näherungen bestimmt, deren Konvergenz jedoch nicht erörtert wird. *Wuest* (Göttingen).

Krzywoblocki, M. Z.: On steady, laminar two-dimensional jets in compressible viscous gases far behind the slit. Quart. appl. Math. **7**, 313—323 (1949).

Für kompressible Strömung wird die Ausbreitung eines ebenen laminaren Strahles berechnet, der aus einem langen, schmalen Schlitz ausfließt. Das entsprechende inkompressible Problem war schon früher von Ref. [Z. angew. Math. Mech. **13**, 260—263 (1933) und W. G. Bickley [Philos. Mag., J. Sci., London, VII. S. **23**, 727—731 (1937)] behandelt worden. Zu den Strömungsgleichungen kommen im vorliegenden Fall noch die Energiegleichung (Wärmeinhalt) und die Zustandsgleichung hinzu. Mit den üblichen grenzschichttheoretischen Vereinfachungen gelingt die Lösung in Form einer asymptotischen Entwicklung für große Abstände x von der Austrittsöffnung. Für die Längsgeschwindigkeit ergibt sich eine Potenzreihe nach $x^{-1/2}$ mit Koeffizienten-Funktionen abhängig von $\eta = y/x^{1/2}$ (y = Breitenkoordinate). Die in den Einzelheiten sehr komplizierten Rechnungen können in der vorliegenden kurzen Abhandlung nur in ihren Grundzügen angedeutet werden. — Es muß alleidings bemerkt werden, daß bei kompressibler Strömung (große Geschwindigkeit) der Strahl meist turbulent sein dürfte, so daß diesen Rechnungen nur eine geringe praktische Bedeutung zukommt.

H. Schlichting (Braunschweig).

Théron, Pierre: Sur un théorème d'existence des mouvements des fluides plans avec sillage. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1922—1923 (1949).

Wärmelehre:

• **Rushbrooke, G. S.:** Introduction to statistical mechanics. London: Oxford University Press, 1949, XII, 334 p. 21 s. net.

Inhalt: Einleitung. Gesamtheiten von unabhängigen lokalisierten und nicht-lokalisierten Systemen. Übergang zur klassischen Mechanik. Innere Verteilungsfunktionen. Spezifische Wärme der zweiatomigen Gase. Ortho- und Parawasserstoff; metastabiles Gleichgewicht. Rotations- und Schwingungsspektren. Mehratomige Moleküle, der dritte Hauptsatz der Thermodynamik, behinderte Rotation. Polare und nicht-polare Gase in äußeren Feldern. Gasnischen und Massenwirkungsgesetz; chemische Potentiale von gasförmigen Gesamtheiten. Gesamtheiten in zwei Phasen mit ein oder zwei Komponenten. Verteilungsfunktionen für konstante Temperatur. Nicht-ideale Gase. Große Verteilungsfunktionen. Reguläre, aber nicht-perfekte Lösungen. Statistische Mechanik, Thermodynamik und physikalische Modelle. — Das Ziel des Buches ist, die grundlegenden Vorstellungen der statistischen Mechanik und die Technik ihrer Anwendung zu entwickeln. Die Darstellung kommt mit recht elementarer Mathematik aus, überdies werden alle Rechnungen in der ersten Hälfte des Buches ausführlich mit allen Zwischenschritten wiedergegeben, während in der zweiten Hälfte, wo bereits eine gewisse Vertrautheit mit den mathematischen Methoden der statistischen Mechanik vorausgesetzt werden kann, auf manche rechnerischen Einzelheiten verzichtet wird. Im wesentlichen auf induktiver Grundlage werden die drei wichtigen Methoden der statistischen Mechanik, die auf der Abzählung der Komplexionen, der Verteilungsfunktion bzw. Zustandssumme und der großen Verteilungsfunktion beruhen, in äußerst anschaulicher Weise entwickelt; ihre Brauchbarkeit wird an zahlreichen Beispielen

gezeigt. Alle Schwierigkeiten, so die verschiedenen bekannten Paradoxa, werden eingehend besprochen und, so weit es im Rahmen dieser Einführung möglich ist, aufgelöst. — Im Gegensatz zu den meisten anderen Darstellungen der statistischen Mechanik wird von Anfang an der quantentheoretische Standpunkt eingenommen. Dies vereinfacht die Darstellung wesentlich, ohne daß dem Leser mehr von der Quantentheorie zugemutet werden muß als die Tatsache der Existenz diskreter Energieniveaus und der Begriff ihrer Entartung. — Diese Einführung ist für den physikalischen Chemiker gedacht, wird aber mit großem Nutzen auch vom angehenden theoretischen Physiker als Vorbereitung für das Studium der Standard-Werke über statistische Mechanik gelesen werden. *J. Meixner (Aachen).*

Dingle, R. B.: The zero-point energy of a system of particles. *Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics*, VII. S. 40, 573—578 (1949).

Die Nullpunktsenergie eines Bosegases wird mit einer Variationsmethode abgeschätzt. Unter der Voraussetzung, daß die Partikel sich wie undurchdringliche Kugeln verhalten und ihr mittlerer Abstand l groß gegen ihren Durchmesser a ist, findet Verf. für $N \rightarrow \infty$ $E = 1,2 a h^2 / \pi m l^3$ und bestätigt damit ältere, auf anderem Wege gefundene Ergebnisse von Heitler und von Lenz (1929). *Höhler (Berlin).*

Elektrodynamik:

Müller, Cl.: Das allgemeine Beugungsproblem und die Separation der Maxwell'schen Gleichungen nach Bromwich. *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg* 16, 95—103 (1949).

Seien ξ_1, ξ_2, ξ_3 krummlinige orthogonale Koordinaten und

$$ds^2 = l_1^2 d\xi_1^2 + l_2^2 d\xi_2^2 + l_3^2 d\xi_3^2.$$

Unter den Annahmen (1) $l_1 = 1$, $\partial(l_2/l_3)/\partial\xi_1 \equiv 0$ [Ansatz von Bromwich, *Philos. Mag., J. Sci.*, London, VI. S. 38, 143 (1919)] läßt sich jedes Feld $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$, das den Maxwell'schen Gleichungen in einem Gebiet mit konstanten Werten von ε, μ, σ genügt, aus zwei Teilfeldern aufbauen, deren Komponente E_1 bzw. H_1 bezüglich der Koordinate ξ_1 verschwindet. Jedes dieser beiden Teilfelder läßt sich aus einem skalaren Potential durch Differentiationen herleiten. Es wird untersucht, für welche Koordinatensysteme die Annahmen (1) zutreffen. Es ergibt sich, daß dann die Flächen $\xi_1 = \text{const.}$ entweder Kugeln oder Ebenen sind. Die Bedeutung dieser Ergebnisse für die Beugungstheorie wird kurz besprochen. *J. Meixner (Aachen).*

Eckart, G.: Le dipôle magnétique dans une atmosphère stratifiée de symétrie sphérique. *C. r. Acad. Sci., Paris* 228, 1279—1280 (1949).

In einer Atmosphäre mit der Dielektrizitätskonstanten $\alpha + \beta/r$ ($\alpha, \beta = \text{konstant}$, $r = \text{Abstand vom Koordinatenanfangspunkt}$) befinde sich ein magnetischer Dipol. Er erzeuge ein elektrisches Feld E_φ und ein magnetisches Feld H_r, H_θ . Die Strahlung des Dipols ergibt sich als Greensche Funktion der Wellengleichung für den Fitzgerald'schen Vektor, welche formal mit der Schrödingergleichung des wellenmechanischen Keplerproblems übereinstimmt. Die Greensche Funktion des letzteren Problems (vgl. die Arbeiten des Ref., dies. Zbl. 7, 15; 16, 427) läßt sich daher für die Strahlung des Dipols übernehmen. *J. Meixner (Aachen).*

Schumann, Winfried Otto: Über sphärische elektromagnetische Eigenschwingungen in Räumen, die Plasmen enthalten. *Z. Naturforsch.* 4a, 486—491 (1949).

Verf. wird in der vorliegenden Untersuchung an Hand ausgewählter Beispiele zeigen, wie durch das Vorhandensein eines Plasmas bisher schon bekannte hochfrequente Schwingungsfelder und Eigenfrequenzen geändert werden, wobei insbesondere die kleinsten möglichen Eigenfrequenzen von Interesse sind. Behandelt werden eine mit Plasma gefüllte leitende Hohlkugel, eine dielektrische und eine leitende Kugel in einer Plasmaatmosphäre, und eine Plasmakugel in Luft. Das Plasma ist dabei unter Vernachlässigung der Dämpfung bestimmt durch die Frequenzabhängigkeit $\varepsilon = I - \omega_p^2/\omega^2$ seiner Dielektrizitätskonstante ε und durch seine Eigenfrequenz $\omega_0 = N e^2/\varepsilon_0 m$; die hochfrequenten Felder sind bestimmt durch ein

Vektorpotential. Prinzipiell handelt es sich darum, die Maxwell'schen Gleichungen zu lösen unter Berücksichtigung der diesbezüglichen Randbedingungen; dies führt, wie vorausszusehen, auf Zylinderfunktionen und Kugelfunktionen. Betrachtet werden von vornherein nur besonders einfache Wellentypen, nämlich die transversalen E - und H -Wellen nach der üblichen Bezeichnungsweise, und zwar im wesentlichen für den Fall verschwindender oder sehr kleiner Dämpfung. Auf die Einzelheiten der Diskussion der Lösungen in der hier gebotenen Kürze einzugehen, ist leider nicht möglich. Bemerkt sei jedoch, daß diese Diskussion in sehr komprimierter Form gegeben wird und eine weitgehende Kenntnis der allgemeinen Theorie der Schwingungen voraussetzt.

Seeliger (Greifswald).

Schumann, W. O.: Wellen längs homogener Plasmaschichten. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1948, 255—279 (1949).

In vollkommener Analogie zur Theorie der elektromagnetischen Wellen an Drähten, in Hohlleitern usw. und mit den dort üblichen Bezeichnungsweisen diskutiert Verf. eingehend die verschiedenen möglichen Wellenformen, die sich längs homogener Plasmaschichten fortpflanzen können. Das Plasma ist ein zwar ionisiertes, aber neutrales (d. h. in jedem Volumelement gleich viele positive und negative Ladungsträger enthaltendes) Gas, in dem die negativen Ladungsträger frei bewegliche Elektronen sind. Die Dielektrizitätskonstante ϵ eines derartigen Mediums ist bei Vernachlässigung der Dämpfung infolge der energiedissipierenden Zusammenstöße zwischen den Elektronen und den Atomen des Grundgases, in das die Ladungsträger eingebettet sind, frequenzabhängig in der Weise $\epsilon = \sqrt{1 - \omega_0^2/\omega^2}$, wo ω_0 eine die „Plasmadichte“ charakterisierende Konstante ist. Die Besonderheiten der Wellenfortpflanzung im vorliegenden Fall sind also bedingt durch diesen Ansatz für ϵ . Behandelt werden 1. eine ebene Plasmaschicht zwischen zwei Luftschichten, 2. ein Plasmazyylinder in Luft, 3. eine Luftschicht zwischen zwei Plasmahalbräumen, 4. eine ebene Luftschicht zwischen einem Plasmahalbraum und einem unendlich gut leitenden Halbraum, 5. eine ebene Plasmaschicht zwischen zwei leitenden Halbräumen. Macht man für die Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärken Exponentialansätze mit $e^{i\omega\tau}$ als Zeitfaktor und z. B. $e^{-i\alpha x}$ als Raumfaktor, welche die Maxwell'schen Gleichungen befriedigen, so kommt mathematisch die Problemstellung darauf hinaus, diese Ansätze so einzurichten, daß die üblichen Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen erfüllt werden, und dann weiterhin die so fixierten Lösungen zu diskutieren. Diese Diskussion ist mit Ausnahme des Zylinderfalles (wo an Stelle trigonometrischer Funktionen Besselfunktionen auftreten) an sich durchaus elementar, ist aber weitläufig und unübersichtlich und in Kürze nicht wiederzugeben. Das Ergebnis besteht in Einzelangaben über die möglichen Wellenformen, über den Feldverlauf, über die Struktur der Wellen usw. Zum Schluß geht der Verf. noch kurz darauf ein, wie eine Berücksichtigung der Dämpfung sich auswirken würde. Die Dielektrizitätskonstante des Plasmas wird dann komplex, und insbesondere bei Annäherung von ω an ω_0 kann die Dämpfung die ganze Situation erheblich ändern; eine noch einigermaßen übersichtliche Durchführung der Diskussion würde jedoch vermutlich hier kaum mehr möglich sein.

Seeliger.

Schumann, W. O.: Hochfrequente Schwingungserscheinungen in inhomogenen Plasmen. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1948, 281—290 (1949).

Wenn man ein Plasma (d. h. ein Medium, das positive und negative frei bewegliche Ladungsträger enthält und im ungestörten Zustand überall neutral ist) einem elektrischen Wechselfeld aussetzt, können sich in seinem Inneren an bestimmten Stellen schwingende Schichten ausbilden. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, wo derartige Schichten liegen und welche Eigenschaften sie besitzen. Verf. bedient sich dabei eines elektrotechnischen Ersatzmodells: Für hinreichend hohe Frequenzen des Wechselfeldes kann ein homogenes Plasma aufgefaßt werden als Parallelschaltung eines Kondensators mit einer Spule, die Ohmschen Widerstand enthält. Wenn die Plasmadichte (= Zahl der Ladungsträger in der Volumeinheit) nur von einer Koordinate x abhängt, besteht das Ersatzmodell aus einer Reihe solcher Schwingkreise mit verschiedenen Eigenfrequenzen, die in Serie geschaltet sind. Dabei können gewisse dieser Kreise in Resonanz besonders stark schwingen, und es tritt dann die erwähnte Schichtbildung auf. Die (wesentliche!) Annahme einzelner, unabhängig voneinander schwingender Schichten ist allerdings nur zulässig, wenn die räumliche Dichteänderung des Plasmas langsam erfolgt, gemessen an der Schwingungsamplitude der Elektronen. Diese Betrachtungsweise ist zwar dem reinen Physiker zunächst etwas fernliegend, ermöglicht aber eine bemerkenswert einfache Darstellung der Sachlage. — Aus dem komplexen Leitwert

$$Y = i\omega\Delta + \left(\frac{1}{b\rho} - i\omega\frac{m}{e\rho}\right) \left/ \left(\left(\frac{1}{b\rho}\right)^2 + \omega^2\left(\frac{m}{e\rho}\right)^2 \right) \right.$$

(Δ = Kapazität der Volumeinheit = Dielektrizitätskonstante, b = Beweglichkeit der Elektronen, p = Plasmadichte) erhält man die Feldstärke $E = G/Y$, wo G die vorgegebene Stromdichte ist. Die Raumladungsdichte ρ ist gegeben durch $\rho/\Delta = dE/dx = G \cdot d(I/Y)/dx$. Wenn das erste Glied im Nenner von Y vernachlässigt werden darf, lassen sich alle Formeln sehr vereinfachen durch Einführung von $\mu = (\Delta p_0 e/m)^{\frac{1}{2}}$; $v = e \Delta/m p$; $\kappa = p/p_0$, wo $p_0 = \omega^2 m \Delta/e$ die „Resonanzdichte“ des Plasmas ist; es wird dann nämlich Y eine lineare Funktion von κ . Gewisse Folgerungen über die Feld- und Ladungsverteilung lassen sich bereits für den allgemeinen Fall $\kappa = f(x)$ ziehen. Vollständig und allgemein durchführen läßt sich die Diskussion natürlich nur für konkrete spezielle Formen von $f(x)$, von denen als praktisch wichtiger $\kappa \propto x$, d. h. lineares Anwachsen der Plasmadichte mit x und dann noch die Ansätze $\kappa \propto x^{\frac{1}{2}}$ und $\propto x^2$ behandelt werden. Seeliger (Greifswald).

Optik:

Braunbek, Werner: Zur Lichtbeugung an statistischen Ringplatten. *Z. Naturforsch.* 4a, 509—515 (1949).

Es wird die Theorie der von Kossel [*Z. Naturforsch.* 3a, 496 (1948)] angegebenen Beugungsplatten entwickelt, auf welchen statistisch verteilte Kreiströme eingeätzt sind. Der Intensitätsverlauf hinter einer solchen Platte bei achsenparalleler Beleuchtung wird mit Hilfe des Kirchhoffschen Integrals berechnet. Die an den verschiedenen Kreiströmen (deren Radien zwischen zwei Radien R_1, R_2 gleicher Größenordnung gleich wahrscheinlich verteilt sein sollen) gebeugte Strahlung ist nicht völlig inkohärent, da zwischen Ringradius und Phase eine feste Beziehung besteht. Daher setzt sich die Intensität aus zwei Summanden zusammen, von welchen der eine proportional zur Anzahl N der Ringe ist, der andere proportional N^2 . Das letztere Glied kommt erst bei extrem großen N in Betracht [sobald nämlich der mittlere Abstand der Ringe von der Größenordnung der Wellenlänge wird oder kleiner (Ref.)]; die diskrete Struktur der Kreiströme macht sich dann gar nicht mehr bemerkbar, und man erhält die Beugung an einer durchsichtigen Ringscheibe. Für mäßig große N dagegen überwiegt das zu N proportionale Glied; hierfür werden einige Näherungsformeln entwickelt, welche den Verlauf in unmittelbarer Umgebung der Achse einerseits, und in hinreichendem Achsenabstand andererseits zeigen. Längs der Achse ergibt sich ein Intensitätsmaximum, welches beim Betrachter den Eindruck eines scharf begrenzten „Brennstrahles“ hervorruft. Der Abfall der Intensität außerhalb der Achse erfolgt jedoch so langsam, daß bei Ringscheiben von einigen cm Durchmesser nur etwa ein Millionstel der Energie in dem „Brennstrahl“ enthalten ist. Dieser ist in Wahrheit gar kein Strahl, sondern eine kontinuierliche Folge von Beugungsmaximis nullter Ordnung. Daher verschwindet der „Brennstrahl“ hinter einer Kreisblende, um wieder aufzutauhen, sobald die Ringscheibe von der Achse aus wieder sichtbar wird. Hinter einer Lochblende dagegen erlischt der Strahl nach einer kurzen Strecke. W. Franz (Münster).

Hubert, Pierre: Lentille électronique corrigée de l'aberration de sphéricité. *C. r. Acad. Sci., Paris* 228, 233—235 (1949).

Der Öffnungsfehler einer Elektronenlinse soll (wie bereits öfters vorgeschlagen worden ist) durch die Wirkung der positiven Influenzladungen, welche die Bahnelektronen auf einem metallischen, coaxialen Zylinder vom Radius r_0 und der Länge l hervorrufen, korrigiert werden. Das Wesentliche bei dieser Anordnung ist, daß diese elektrische „Bildkraft“ auf die Elektronen wie eine Zerstreuungslinse wirkt, deren Brennweite den angenäherten Wert $d = d_0(1 - \varepsilon^2)^2$ besitzt, wobei $\varepsilon = r/r_0$ und $d_0 = 2r_0^3 \Phi/e l$ (Φ Voltgeschwindigkeit der Elektronen) gesetzt worden ist. Durch Kombination dieser Zerstreuungslinse mit der Elektronenlinse könnte man daher, wie in der Lichtoptik, den Öffnungsfehler (zumal den von 3. Ordnung) beheben. (Allerdings scheinen uns die notwendigen Dimensionierungsdaten für eine technische Realisierung ziemlich ungünstig zu liegen.) Durch entsprechende Wahl von r_0 kann man einen günstigen Kompromiß zwischen Öffnungsfehler und Elektronenbeugung erreichen, der zu einer Verbesserung des Auflösungsvermögens von 7 auf 3,7 Å führen würde. (Allerdings verlangt dies einen Zylinder von 5 cm Länge und $1,6 \cdot 10^{-3}$ cm Radius, dessen technische Verwirklichung und Zentrierung nicht leicht erreicht werden dürfte. Zus. d. Ref.) W. Glaser (Wien).

Wax, Nelson: Some properties of tubular electron beams. *J. appl. Physics, Lancaster Pa.* 20, 242—247 (1949).

Es werden angenäherte Ausdrücke für die Potentialverteilung, die maximale

Stromdichte und die Strahlverbreiterung von hohlzylinderförmigen Elektronenbündeln von endlicher Dicke hergeleitet. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Elektronen von einer Quelle vom Potential Null mit der Anfangsgeschwindigkeit Null ausgesandt werden und sich mit konstanter Geschwindigkeit parallel zur Achse bewegen (solange von der Strahlverbreiterung abgesehen wird). Die Elektronengeschwindigkeit wird gegenüber der Lichtgeschwindigkeit als klein vorausgesetzt und die Stromdichte über den Querschnitt als konstant angenommen. Die Resultate werden mit früheren für unendlich dünne zylindrische Hohlbündel und für Bündel von Vollzylinder-Form verglichen. Es zeigt sich, daß die maximale Stromdichte bei gleicher Strahlverbreiterung für ein Hohlzylinder-Bündel größer sein kann als für ein Vollzylinder-Bündel. *W. Glaser (Wien).*

Meltzer, B.: Electron flow in curved paths under space-charge conditions. *Proc. phys. Soc. London, Sect. B* **62**, 813—817 (1949).

Im Anschluß an eine frühere Untersuchung (dies. Zbl. **33**, 171) wird ein weiteres allgemeines Beispiel einer dreidimensionalen Elektronenbewegung unter dem Einfluß der Raumladungskräfte beschrieben. Außerdem werden eine Anzahl allgemeiner Kriterien für das Geschwindigkeitsfeld der Raumladungsbewegung angegeben. Diese beziehen sich sowohl auf den Fall der allgemeinen Bewegung, als auch speziell auf den Fall der in der Arbeit unterschiedenen „normalen“ bzw. „anormalen“ Bewegung. Bei der „normalen“ Bewegung sollen die Elektronen auf den Äquipotentialflächen gleiche, bei der „anormalen“ Bewegung verschiedene Energien besitzen. *Ecker.*

Scherzer, O.: The theoretical resolution limit of the electron microscope. *J. appl. Physics, Lancaster Pa.* **20**, 20—29 (1949).

Das Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops und der Bildkontrast werden für verschiedene Aperturen, Fokussierungs- und Beleuchtungsbedingungen berechnet. Diese Bedingungen können das Auflösungsvermögen bis zu einem Faktor 3 verändern. Der Kontrast im Bild eines Atoms kann merklich erhöht werden durch Defokussierung und sphärische Aberration. Trotzdem wird der Kontrast verbessert, wenn der numerische Wert der Aberrationskonstanten verringert wird. Der Effekt der verschiedenen Methoden der sphärischen Korrektur wird kurz diskutiert. (Zusammenfassung des Autors.) *W. Glaser (Wien).*

Relativitätstheorie:

Milne, E. A. and G. J. Whitrow: On the so-called „clock-paradox“ of special relativity. *Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London*, VII. S. **40**, 1244—1249 (1949).

Verff. glauben, das Uhrenparadoxon der speziellen Relativitätstheorie im Rahmen der Milneschen kinematischen Relativität dadurch zu lösen, daß sie die beiden miteinander zu vergleichenden Beobachter entgegengesetzte Beschleunigungen durchlaufen lassen, wodurch dann bei jeder irgendwann stattfindenden Koinzidenz ihre Uhren übereinstimmen müssen. *Heckmann (Hamburg).*

Causse, Maurice: La notion de masse et ses conventions en relativité cinématique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **228**, 370—372 (1949).

Kritische Betrachtungen über die Definition der trägen Masse in der Milneschen kinematischen Relativität. Verallgemeinerung der Milneschen Bewegungsgleichungen, so daß Kraft und Masse miteinander zusammenhängen durch eine 4-dimensionale Vektordifferentialgleichung, in der die Masse als eine willkürliche (analytische), skalare, invariante Funktion des Ortes, der Geschwindigkeit und der Zeit auftritt, die für alle Fundamentalpartikel den gleichen Wert hat. *Heckmann (Hamburg).*

Causse, Maurice: Les notions de masse et d'énergie et le problème des deux corps en relativité cinématique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **228**, 542—544 (1949).

Anwendung der in der vorhergehenden Arbeit abgeleiteten Bewegungsgleichung auf die Bewegung zweier benachbarter beschleunigter Partikel, um formal ihre

Wechselwirkung zu gewinnen. Will man in erster Näherung die klassische Gravitation erhalten, so muß die Masse eine Konstante werden. *Heckmann* (Hamburg).

Trocheris, M. G.: *Electrodynamics in a rotating frame of reference*. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. S. 40, 1143—1154 (1949).

Verf. definiert die Transformationsgleichungen der Raum- und Zeitkoordinaten auf ein rotierendes Bezugssystem durch die Forderung, daß diese Gleichungen in die einer Lorentztransformation übergehen, wenn man die Drehachse der Rotation ins Unendliche rücken läßt und so unter Festhaltung von $v = \omega r$ für $r \rightarrow \infty$ aus der Rotation eine Translation wird. Für kleine Rotationsgeschwindigkeiten $[(\omega r/c)^2 \ll 1]$ erhält Verf. in erster Approximation diese Gleichungen dadurch, daß er das Zeitdifferential $dt = dt' - (\omega r'^2/c^2) d\vartheta'$ der zur Geschwindigkeit $v = r\omega$ gehörenden Lorentztransformation durch willkürliche Addition von $(2\omega r'/c^2 \vartheta') dr'$ zu einem vollständigen Differential macht, was auf eine besondere Art der Zeitdefinition im rotierenden System hinausläuft. Man erhält so die Transformationsgleichungen: $r = r'$, $\vartheta = \vartheta' - \omega t'$ und $t = t' - \omega r'^2/c^2 \vartheta'$. Für beliebige ω erhält man aus diesen „infinitesimalen Transformationen“ die Transformationsgleichungen $r' \vartheta' = (r \vartheta + vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $r = r'$, $t' = (t + vr \vartheta/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $z' = z$. Hierbei ist die Geschwindigkeit v der Lorentztransformationen nicht der Grenzwert von ωr , sondern von $\text{cth}(\omega r/c)$. Als kinematische Folgerung ergibt sich, daß die Zeitangaben zweier Uhren A und B an derselben Stelle eines Parallelkreises, welche für einen nicht mitrotierenden Beobachter zusammenfallen, dies nicht mehr tun, wenn die eine Uhr B um den Winkel 2π einmal herum bewegt worden ist. Sie wird dann gegenüber A um $\Delta t' = 2\pi r/c \text{ sh}(\omega r/c)$ zurück sein. Die exakte Bestimmung des Polariswinkels ϑ für eine Uhr im rotierenden System ist daher äquivalent der Festlegung der Zeit, die von dieser Uhr für einen festen Beobachter angezeigt wird. Unter der Voraussetzung $(\omega r/c)^2 \ll 1$ werden die Theorie des Versuches von Sagnac und die Elektrodynamik in rotierenden Systemen besprochen. Als spezielle Probleme werden das Feld des rotierenden Kugelkondensators, das Feld rotierender Ströme und das elektrische Feld eines rotierenden zylindrischen Magneten (Unipolarinduktion) diskutiert. *W. Glaser* (Wien).

Hund, F.: *Zugänge zum Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie*. Z. Physik 124, 742—756 (1948).

Les exposés de la théorie einsteinienne de la gravitation ont généralement un caractère axiomatique et a priori et c'est en quelque sorte rétrospectivement que l'on étudie les rapports entre la théorie einsteinienne et la théorie newtonienne. Dans ce papier, l'A. s'efforce de donner un exposé naturel, à partir des idées de Mach, du passage de l'une des théories à l'autre. Son point de vue se rapproche beaucoup de celui de Painlevé et ses équations „intermédiaires“ sont voisines de celles que Painlevé avait formé. La démarche de l'A. est, grosso modo, la suivante: formation des équations du champ, en mécanique newtonienne, pour un système d'axes en mouvement arbitraire. Les équations de la mécanique newtonienne sont écrites sous la forme $m \vec{r}'' = \vec{K}$, $\vec{K} = m \vec{F} + m \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{G}$ où le terme $m \vec{F}$ groupe l'effet de gravitation proprement dit et la force centrifuge, tandis que le second terme correspond à l'effet centrifuge composé; c'est une constante ayant la dimension d'une vitesse et qui sera ensuite identifiée à la vitesse de la lumière. Les équations du champ correspondant sont alors écrites pour \vec{F} et \vec{G} sous une forme qui se rapproche des équations de Maxwell. Ces équations newtoniennes sont ensuite modifiées en des équations „intermédiaires“, grâce à des considérations dont le caractère nécessaire n'apparaît pas au rapporteur. Ces équations intermédiaires conduisent enfin à l'approximation linéaire des équations d'Einstein. L'A. les compare aussi avec les équations déduites du ds^2 de Schwarzschild. *Lichnerowicz* (Paris).

Einstein, A. and L. Infeld: On the motion of particles in general relativity theory. *Canadian J. Math.* **1**, 209—241 (1949).

Verff. wünschen jeden besonderen Ansatz für den Energie-Impuls-Tensor von vornherein zu vermeiden und behandeln daher die Feldgleichungen nur im Falle des leeren Raumes, indem sie die Materie durch die Singularitäten des Feldes darstellen. Die Feldgleichungen werden durch ein Verfahren sukzessiver Approximation gelöst, indem die Komponenten des Fundamentaltensors nach Potenzen eines kleinen Parameters entwickelt werden. Die Arbeit stellt eine Verbesserung früherer dar [Einstein, Infeld und Hoffmann, *Ann. Math.*, Princeton, II. S. **39**, 65—100 (1938); Einstein und Infeld, *Ann. Math.*, Princeton, II. S. **41**, 455—464 (1940) dies. Zbl. **18**, 281, **24**, 139] und ist wie diese in einem kurzen Referat nicht wiederzugeben. Ihr Wert liegt in der Herleitung der Bewegungsgleichungen aus den Feldgleichungen, ohne das Postulat der geodätischen Linien für erstere anzunehmen.

Heckmann (Hamburg).

Wyman, Max: Radially symmetric distributions of matter. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. **75**, 1930—1936 (1949).

Kugelsymmetrisch-statische Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen in materieerfüllten Gebieten werden betrachtet, in welchen statt einer Zustandsgleichung um der mathematischen Einfachheit willen andere Annahmen gemacht werden: Nach Festlegung von Grenzbedingungen für Massenkugeln werden zunächst verschiedene Annahmen über den Dichteverlauf diskutiert, die auf integrierbare Riccati-Gleichungen führen. Dann werden einige von R. C. Tolman [*Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. **55**, 364—373 (1939); dies. Zbl. **20**, 284] angegebene Lösungen verallgemeinert. Der physikalische Charakter der konstruierten Lösungen ist nicht immer klar.

Heckmann (Hamburg).

Buchdahl, H. A.: Temperature equilibrium in a stationary gravitational field. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. **76**, 427—428 (1949).

Beweis, daß die in statischen Gravitationsfeldern geltende Tolman-Ehrenfestsche Beziehung $T_0 \sqrt{g_{44}} = \text{const.}$ auch in bestimmten stationären Feldern gilt.

Heckmann (Hamburg).

Chazy, Jean: Sur le calcul de deux vérifications de la théorie. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **227**, 455—458 (1948).

Vereinfachende Bemerkungen über Periheldrehung und Lichtablenkung im Schwerefeld des Schwarzschildschen Linienelementes.

Heckmann (Hamburg).

Synge, John L.: Gravitational field of a particle. *Nature*, London **164**, 148—149 (1949).

Hinweis auf die Wegtransformierbarkeit der scheinbaren Singularität im Schwarzschildschen Linienelement, wenn der Radius gleich dem sog. „Gravitationsradius“ wird. Erörterung paradoxer Folgerungen für die Bewegung von Probenpartikeln. (Vorläufige Mitteilung.)

Heckmann (Hamburg).

Clark, G. L.: The mechanics of continuous matter in the relativity theory. *Proc. R. Soc. Edinburgh, A* **62**, 434—441 (1948).

Die Arbeit ist der bisher nur sehr unentwickelten allgemein-relativistischen Theorie der Elastizität gewidmet. „Inkompressible“ Materie wird definiert als solche, in welcher Dilatationswellen mit Lichtgeschwindigkeit laufen. Es ergibt sich u. a., daß die von Lorentz abgeleitete und von Eddington in seinem bekannten Lehrbuch wiedergegebene Kontraktion des Radius einer rotierenden Scheibe für einen mitrotierenden Beobachter nicht eintritt.

Heckmann (Hamburg).

Clark, G. L.: The problem of a rotating incompressible disk. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **45**, 405—410 (1949).

Gewisse in der vorhergehenden Arbeit noch gemachte Vernachlässigungen werden aufgehoben, ohne daß das Resultat betr. die rotierende Scheibe sich änderte.

Heckmann (Hamburg).

Nubar, Zareh: Sur une théorie physique de la gravitation. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 743—745 (1949).

Versuch einer Gravitationstheorie auf Grund der Annahme einer Stoßfortpflanzung unter radial schwingenden Partikeln im Raume zwischen den Gestirnen.
Heckmann (Hamburg).

Atomphysik.

Quantenmechanik:

Bass, Jean: Sur les moyennes et les lois de probabilité en mécanique ondulatoire. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 112—114 (1948).

En se servant d'une formule de E. Arnaud, l'A. donne une démonstration simple de la formule de Wigner relative à la fonction $f(x, u, t)$ jouant formellement le rôle de densité de probabilité pour le système position-vitesse et compatible avec les principes de la mécanique ondulatoire. Dans le cas pur où le noyau statistique est de la forme $S(x, y, t) = \psi(x, t) \psi^*(y, t)$ et l'hamiltonien $H = (p^2/2) + V(x, t)$, pour calculer la fonction caractéristique Φ , il suffit de savoir résoudre l'équation de Schrödinger pour l'hamiltonien $H_\mu = H + \mu x$ (μ paramètre quelconque).

G. Petiau (Paris).

Faure, Robert: Correspondance mécanique classique — mécanique ondulatoire. Intégrale du deuxième ordre indépendante du temps. Principe d'extrémum. Formation des opérateurs du deuxième ordre. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 261—263 (1948).

On montre que si un problème de mécanique classique d'hamiltonien

$$H = (1/2) \left(\sum_{i,k} g^{i,k} p_i p_k \right) + u(q_1, \dots, q_n)$$

admet l'intégrale première

$$\sum_{i,k} P_{i,k}(q_1, \dots, q_n) p_i p_k + R(q_1, \dots, q_n),$$

le problème de mécanique quantique correspondant admet l'intégrale première quantique

$$-\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \left(\sum_{i,k} P_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} + Q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + R_1 \right) + R \text{ avec } Q_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} (P_{k,i} \sqrt{g}).$$

G. Petiau (Paris).

Viard, Jeannine: Cinématique opératorielle du corps solide rigide. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 746—748 (1949).

Dans sa Thèse de Doctorat (Paris 1947), l'A. a défini le corps solide rigide en mécanique ondulatoire par la condition que par rapport à un trièdre relatif lié au mouvement du système de corpuscules considéré, les coordonnées de ces corpuscules sont des constantes. Le mouvement du corps solide ainsi défini est étudié ici par rapport à un repère quelconque. On montre que la vitesse relative droite (ou gauche) par rapport à un repère quantique quelconque d'un point d'un corps solide rigide, est la résultante de la vitesse de translation d'un point lié au corps et d'une vitesse de rotation droite (ou gauche).

G. Petiau (Paris).

Viguer, Gabriel: Enchaînement et quantification: une généralisation du théorème de Darboux à propos du rotateur sphérique. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 504—506 (1948).

L'équation d'ondes du rotateur sphérique peut se ramener par un changement de variable et de fonction convenable à l'équation de Riccati

$$(1) \quad \frac{d\tau}{dx} + \frac{\tau^2}{1-x^2} + k(k+1) = 0.$$

Les polynômes de Legendre peuvent par suite être associés à des notions métriques résultant de la théorie des développantes généralisées planes par laquelle on étudie

l'équation de Riccati. — Par une généralisation du théorème de Darboux on forme facilement une chaîne d'équations qui permet de ramener l'équation (1) à des quadratures.

G. Petiau (Paris).

Viguier, Gabriel: Notions métriques liées à une vibration moléculaire en quatrième puissance. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 266—268 (1948).

L'équation d'ondes de l'oscillateur unidimensionnel pour lequel $V(x) = ax^4$ peut se ramener par un changement de variable et de fonction à l'équation de Riccati $dy_k/du + y_k^2 + \lambda_k - u^4 = 0$. La théorie des développantes généralisées associées à l'équation de Riccati permet par suite d'aborder le problème de la vibration moléculaire en quatrième puissance à partir de courbes planes isométriques dont la fonction d'arc est $\sigma_k = \lambda_k - u^4$. De même la théorie des développées généralisées (G. Viguier, ce Zbl. **30**, 284) permet de ramener le problème étudié à l'étude de courbes planes isoradiques pour lesquelles le rayon de courbure est $\rho_k = \sqrt{u^4 - \lambda_k}$.

G. Petiau (Paris).

Auluck, F. C. and D. S. Kothari: A note on the Riesz method and the method of residues. Proc. R. Soc., London, A **198**, 170—173 (1949).

Die Methode der analytischen Fortsetzung nach Riesz vermittelt gleich wie der sogenannte λ -Grenzprozeß von Wentzel-Dirac und Pauli divergenzfreie Resultate in der Behandlung elektromagnetischer Quellpunkte. Die Äquivalenz beider Methoden hat S. T. Ma nachgewiesen (dies. Zbl. **32**, 373). Eine dritte Methode geht auf J. Frenkel (Lehrbuch der Elektrodynamik, S. 177) zurück. Verff. erbringen den Äquivalenzbeweis auch für den Vergleich der Rieszschen und der Frenkelschen Methode. Dabei ist nach Frenkel das Viererpotential $A_\mu(x)$ gemäß

$$A_\mu(x) = -q \frac{e}{i\pi} \oint_{(a)} \frac{\dot{z}_\mu(\tau)}{s^2} d\tau, \quad s^2 = [x - z(\tau), x - z(\tau)]$$

zu definieren und nach Riesz-Fremberg [N. E. Fremberg, Proc. R. Soc., London, A **188**, 18, 19 (1943)] gemäß

$$A_\mu^\alpha(x) = \frac{4\pi}{H(\alpha)} \int \dot{j}_\mu(x') r^{\alpha-2} d^4x, \quad H(\alpha) = q^{\alpha+1} \pi \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right), \\ r^2 = [x - x', x - x']$$

zu definieren. Der Vierervektor $\dot{j}_\mu(x)$ beschreibt die Quellenverteilung $\left(\frac{\partial \dot{j}_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0\right)$, die Klammer $[\dots]$ bedeutet skalare Produktbildung im Sinne der Metrik $[A, B] = A_\mu B^\mu = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3$. Für die Kurve C in der komplexen Ebene ergeben sich verschiedene Fälle, je nachdem die Stellen $\tau = \tau_+$ (avancierte Eigenzeit), $\tau = \tau_-$ (retardierte Eigenzeit) von C eingeschlossen werden oder nicht. Das Symbol d^4 bezieht sich auf die vierfache Integration. Die Rieszsche Methode gewinnt durch analytische Fortsetzung zum Parameterwert $\alpha = 0$ die gewünschte Lösung der Maxwell'schen Feldgleichungen. Im Frenkelschen Ansatz bedeutet $z_\mu(\tau)$ die Weltlinie des Quellpunktes. Im Falle einer Punktladung reduziert sich das Riesz'sche Integral auf

$$A_\mu^\alpha(x) = \frac{4\pi e}{H(\alpha)} \int_{-\infty}^{\tau_-} \dot{z}_\mu(\tau) r^{\alpha-2} d\tau.$$

Für $\alpha = 0$ erweisen Verff. dieses Integral als äquivalent mit dem Frenkelschen.

M. Pini (Dacca).

Molière, G.: Laufende elektromagnetische Multipolwellen und eine neue Methode der Feld-Quantisierung. Ann. Physik, VI. F. **6**, 146—162 (1949).

En introduisant les champs complexes $F = H - iE$, $F^* = H + iE$ et un système de trois matrices $\vec{\xi}$, telles que $\text{Rot} = \left(\vec{\xi}, \frac{1}{i} \nabla\right)$, les équations du champ

pour une onde de pulsation ω s'écrivent $\omega F = \left(\vec{\zeta}, \frac{1}{i} \nabla \right) F$ et l'on peut construire par combinaisons des $\vec{\zeta}$ et des $\vec{\nabla}$, des opérateurs caractérisant les grandeurs associées aux photons, les matrices ζ correspondant à son spin. Passant en coordonnées polaires, on est amené à introduire un opérateur $D = (\vec{\zeta}, L) = \left(\zeta \left[r, \frac{1}{i} \nabla \right] \right)$ et l'on a

$$\omega = \frac{1}{r} \left(\zeta_r \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} (\zeta_r D - D \zeta_r) \right).$$

D généralise l'intégrale première de Dirac à l'aide de laquelle on sépare les fonctions d'ondes radiales dans le cas de l'électron dans un champ coulombien. F se représente par une combinaison de produits de fonctions radiales par des fonctions propres de D ne dépendant que des variables angulaires. Le schéma matriciel de cette théorie analogue par certains points à celui de la théorie du méson permet un passage facile à la théorie quantique des champs. G. Petiau (Paris).

Fierz, M.: Zur Theorie der Multipolstrahlung. *Helvetica physica Acta* **22**, 489—500 (1949).

1. Die Strahlung, welche eine gegebene elektrische Stromdichte-Verteilung klassisch aussendet, wird nach Multipolen entwickelt und allgemein in elektrischen und magnetischen Anteil aufgespalten, indem ein bei der Entwicklung nach Potenzen von $1/\lambda$ auftretender Tensor (dessen Komponenten die Produkte von $l-1$ Raumkoordinaten mit einer Komponente der Stromdichte sind) in seinen symmetrischen und seinen schiefen Teil zerlegt wird. Für die Multipolstrahlung niedrigster Ordnung, welche eine Strahlungsquelle ausstrahlt, werden dann einfache Formeln angegeben. — 2. Die Charakteristik der Multipolstrahlung, welche nach der Quantenmechanik beim Übergang eines Atomkernes aus dem Zustande j_1, m_1 in den Zustand j_2, m_2 ausgestrahlt wird, leitet Verf. mit Hilfe der Darstellungstheorie der Drehgruppe allgemein ab. Für den niedrigst möglichen Drehimpuls des Lichtquants ($j = |j_2 - j_1|$) tritt nur eine elektrische 2^j -Pol-Strahlung auf, dagegen ist für $j = |j_2 - j_1| + 1$ der elektrischen 2^j -Pol-Strahlung eine magnetische 2^{j-1} -Pol-Strahlung kohärent überlagert. — 3. Die Korrelationsfunktion für zwei nacheinander emittierte γ -Quanten wird in Abhängigkeit von der Zirkular-Polarisation der Quanten sowie dem zwischen ihren Emissionsrichtungen eingeschlossenen Winkel für beliebige Multipolordnung angegeben. — 4. Tritt Konversion der Strahlung in Elektronen ein, dann überlagern sich wegen der Mittelung über den Spin der Elektronen elektrische und magnetische Übergänge inkohärent. Für Konversion eines K -Elektrons werden die Charakteristik der Elektronenintensität sowie die Korrelationsfunktion bei nachfolgender Emission eines zweiten γ -Quants für elektrische und magnetische Übergänge beliebiger Ordnung angegeben. W. Franz (Münster).

Drell, S. D.: Anomalous magnetic moments of nucleons. *Physic. Rev., Lancaster Pa.*, II. S. **76**, 427 (1948).

Dans cette note l'A. étend la méthode utilisée par lui dans un travail précédent (S. M. Dancoff et S. D. Drell, ce Zbl. **33**, 330) au calcul des anomalies des moments magnétiques des nucléons. L'interaction entre un champ quantifié de nucléons satisfaisant à l'équation de Dirac, un champ méisque quantifié soit scalaire, soit pseudoscalaire, et un champ magnétique extérieur est calculée par un calcul des perturbations du troisième ordre. Les résultats obtenus sont en accord avec ceux obtenus par des méthodes différentes par Luttinger, Slotnick et Case dans le cas du champ méisque pseudoscalaire, par Case dans le cas scalaire. Les valeurs numériques des moments calculées pour des mésons de masse 300 sont dans le cas scalaire de signes contraires et inférieurs aux valeurs expérimentales pour $g^2/4\pi = 0,30$ (théorie méisque chargée) et $g'^2/4\pi = 0,30$ (théorie méisque symétrique). La théorie pseudoscalaire conduit à un signe correct pour les moments, mais si l'on prend $g^2/4\pi = 36$ les anomalies, d'un ordre convenable pour les protons, sont trop grandes pour les neutrons. Un calcul des perturbations du quatrième et du cinquième ordre semble nécessaire. Des quatre renormalisations de masse et de charge pour le proton et le neutron, seule la renormalisation de la masse du proton intervient dans le calcul des moments magnétiques. G. Petiau (Paris).

Bau der Materie:

Welker, H.: Über den Zusammenhang zwischen der Supraleitung und der gemischten Leitung. *Ann. Physik*, VI. F. 5, 1—13 (1949).

Nach einem früher entwickelten Modell des Verf. sollen magnetische Austauschkräfte für den für die Supraleitung (S.L.) notwendigen Ordnungszustand verantwortlich sein. Dies soll aber nur bei Leitern möglich sein, bei denen sich schwach und stark besetzte Energiebänder überlappen, also bei gemischten Leitern. Hier diskutiert Verf. die Konsequenzen, die sich danach für die Verteilung der Supraleiter und ihrer Sprungpunkte im Periodischen System ergeben. Das wichtigste Kriterium ist das den Leitungselektronen im Metall zur Verfügung stehende Volumen unter Berücksichtigung des Volumens der Restionen. Dabei wird wellenmechanisch ein Reduktionsfaktor für das als Differenz aus Atom- und Ionen-volumen berechnete Elektronenvolumen abgeschätzt, der die Erhöhung der translatorischen Nullpunktsenergie der Leitungselektronen durch das Ionenpotential berücksichtigt. Die Zahl der Leitungselektronen wird abgeschätzt, wobei ein umfangreiches empirisches und theoretisches Material durchgemustert wird, wie z. B. die Beziehungen zwischen spezifischer Wärme der Elektronen und magnetischer Schwellwertkurve. Es sollen nur gemischte Leiter s. l. werden, deren reduzierte Elektronendichten zwischen einer oberen und unteren Grenze liegen. Damit erklärt Verf. die Tatsache, daß sich die Erdalkalien bisher als normalleitend erwiesen haben. In bemerkenswerter Übereinstimmung mit den bisherigen Messungen steht die vom Verf. aufgefundene ungefähre Proportionalität zwischen Sprungtemperatur und reduzierter Elektronendichte. Wie Verf. in einer vorangehenden Arbeit festgestellt hat, erfüllen die von ihm angeschriebenen die magnetische Austauschkraft ergebenden Wellenfunktionen noch nicht alle zu fordernden Bedingungen. Die Theorie der S.L. des Verf. kann also noch nicht als endgültig abgeschlossen angesehen werden. Ein wesentlicher Fortschritt gegenüber vielen bisherigen elektronentheoretischen Ansätzen ist der Versuch des Verf., die Struktur der Metalle systematisch zu berücksichtigen.

Schubert (T. H. München).

Artmann, Kurt: Warum wird ein Kikuchi-Band durch zwei scharfe Kanten begrenzt? *Z. Physik* 126, 533—547 (1949).

Die früheren Rechnungen des Verf. (dies. Zbl. 31, 233) ergeben eine von der Mitte nach außen stetig abfallende Intensität der Kikuchibänder. In der vorliegenden Mitteilung wird gezeigt, wie die in Wirklichkeit beobachteten Kanten, welche ein Band begrenzen, zu erklären sind. Anschaulich ergibt sich dies folgendermaßen: Denkt man sich die von einem streuenden Atom ausgehende Kugelwelle in ebene Wellen aller möglichen Fortschreitungsrichtungen zerlegt, so wird die in Richtung des für die Bandbreite maßgebenden Kikuchikegels verlaufende Welle am Oberflächen-(Strich-)Gitter des Kristalls teilweise um eine Ordnung gebeugt. Die Intensität dieser gebeugten Welle, welcher sich der bisher berechneten Intensität überlagert, ist zwar schwach, aber als Funktion der Fortschreitungsrichtung rasch veränderlich, so daß sie bei visueller Beobachtung, bei welcher Kontraste schärfer erscheinen, als sie tatsächlich sind, den Eindruck einer scharfen Kante bedingt. Rechnerisch ergibt sich dieser Intensitätsverlauf mit Hilfe des Laueschen Reziprozitätssatzes durch Berücksichtigung der freien Elektronen, während bisher nur gebundene Elektronen in Betracht gezogen worden waren.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

Fues, E. und H. Riedel: Zur Theorie der Kikuchibänder. *Ann. Physik*, VI. F. 6, 105—109 (1949).

Die Rechnungen von K. Artmann (s. vorsteh. Ref.) ergeben, daß die Intensität eines Kikuchibandes, quer zum Band gemessen, von der Mitte nach den Rändern

hin abfällt. Vielfach wird jedoch, z. B. bei Glimmer, ein Minimum in der Bandmitte beobachtet. Es wird gezeigt, daß die Artmannsche Theorie, die ihrem Wesen nach ein Vielstrahlproblem der dynamischen Theorie behandelt, nur auf den Fall sehr tiefer Potentialmulden (stark gebundene Elektronen) anwendbar ist, daß aber bei mäßig tiefen Potentialmulden die normale dynamische Theorie des Zwei- oder Dreistrahlfalles anzuwenden ist. Es werden die Ergebnisse einer Berechnung von H. Riedel (Stuttgarter Dissertation 1949) mitgeteilt, welche den an Glimmer beobachteten Intensitätsverlauf gut wiedergeben. *A. Kochendörfer* (Stuttgart).

McLachlan jr., Dan: The determination of relative phases of Fourier coefficients from X-ray diffraction data. *J. appl. Physics, Lancaster Pa.* **20**, 295 (1949).

D. Harker und J. S. Kasper (vgl. M. J. Buerger, dies. Zbl. **30**, 334) haben mit Hilfe der Cauchyschen Ungleichheitsbeziehungen die Phasen der Struktur-faktoren bestimmt. Verf. gibt hierzu ein Verfahren an, das nicht unmittelbar an die Strukturfaktoren selbst, sondern an Funktionsbestandteile derselben anknüpft. Den Ausgangspunkt bildet die Tatsache, daß für $-1 < a_i < +1$, $k_i \geq 0$ und ganzzahlige $m \geq 0$ gilt: $\left(\sum_i k_i a_i^m\right) / \left(\sum_i k_i a_i^{m+2}\right) > 1$ bzw. > 0 , je nachdem, ob m gerade bzw. ungerade ist. Für die von Harker und Kasper eingeführten Ausdrücke $A\hat{F}_{hki}$ ergibt sich dann z. B. für $A\hat{F}_{h00} = \sum_i n_i \cos 2\pi h x_i$ im Falle eines

Symmetrie-zentrums bezüglich x : $4 A\hat{F}_{h00} / (A\hat{F}_{3h00} + 3 A\hat{F}_{h00}) > 0$, so daß, wenn $|A\hat{F}_{3h00}| > 3 |A\hat{F}_{h00}|$ ist, $A\hat{F}_{3h00}$ und $A\hat{F}_{h00}$ dasselbe Vorzeichen haben müssen. Allgemeiner Strukturen sollen in einer späteren Mitteilung ausführlich diskutiert werden.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

Kê, T'ing-Sui: A grain boundary model and the mechanism of viscous inter-crystalline slip. *J. appl. Physics, Lancaster Pa.* **20**, 274—280 (1949).

Die innere Reibung von vielkristallinen Stoffen zeigt bei konstanter Frequenz ν als Funktion der Temperatur T ein ausgeprägtes Maximum (Temperatur T_m), das bei Einkristallen fehlt und somit bei ersteren einem viskosen Korngrenzenfließen zuzuschreiben ist. Die aus $dT_m/d\nu$ berechnete Aktivierungsenergie Q stimmt nach den bisherigen Messungen mit der Aktivierungsenergie für die Volumdiffusion überein. Es wird daraus geschlossen, daß die üblichen Vorstellungen über die Beschaffenheit der Korngrenzen, nach denen sie eine strukturlose amorphe Schicht bilden oder einen scharfen, fast ungestörten Übergang zwischen den Körnern vermitteln sollen, nicht zutreffend sind, und es wird angenommen, daß sie aus zahlreichen ungeordneten Atomgruppen bestehen, die ähnliche Eigenschaften besitzen wie die unbesetzten Gitterplätze (Löcher), auf welche die Volumdiffusion nach Wagner und Schottky zurückgeführt wird. Mit diesen Vorstellungen läßt sich das viskose Korngrenzenfließen und das Kriechen bei kleinen Spannungen formelmäßig beschreiben. Die Versuchsergebnisse, nach denen vor der Rekristallisation vorgenommene plastische Verformungen und Verunreinigungen die Korngrenzendiffusion beträchtlich herabsetzen, können auf Grund dieser Vorstellungen qualitativ gedeutet werden.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

Fürth, R.: On the theory of strength of quasi-isotropic solids. *Philos. Mag., J. theor. appl. Physics, London*, VII. S. **40**, 1227—1233 (1949).

Verf. zieht einen qualitativen Vergleich zwischen seiner früheren Theorie der Zerreißfestigkeit in Verbindung mit Schmelz- und Verdampfungswärme und Betrachtungen von L. Bragg über die elastische Grenze. Bei L. Bragg spielt die lineare Abmessung von ungestörten, idealen Kristallbereichen eine Rolle. Beide Ansätze werden dadurch verknüpft, daß Verf. den Schmelzvorgang als ein Aufbrechen des Kristalls in solche Bereiche ansieht, und so einen Zusammenhang zwischen den Linearabmessungen der Bereiche mit der Schmelz- und Verdampfungswärme

erhält. Beide Ansätze stimmen dann überein. Die Größe der Bereiche ist neuerdings durch Röntgenanalyse einiger kubisch raumzentrierter Metalle gemessen, wobei die obigen Ansätze qualitativ bestätigt werden. Die Größe der idealen Bereiche folgt aus einer Theorie M. Borns. Sie ist im wesentlichen gegeben durch die Amplitude der Nullpunkts- und Temperaturschwingungen des Kristalls. Die experimentellen und errechneten Werte werden verglichen und stimmen verhältnismäßig gut überein. *Leibfried* (Göttingen).

Hudson, Douglas Rennie: Density and packing in an aggregate of mixed spheres. J. appl. Physics, Lancaster Pa. **20**, 154—162 (1949).

Es wird untersucht, in welcher Weise bei kubischen und hexagonalen dichtesten Kugelpackungen (Kugelradius R) in die vierecks- und dreiecksförmigen Zwischenräume kleinere Kugeln (Radius r) eingebracht werden können. Es ergibt sich, daß bezüglich der ersten Zwischenräume bei den Anzahlen $n = 8, 9$ und 21 mit $r/R = 0,229, 0,217$ und $0,225$ Maxima der Dichtezunahme von $13, 12$ und 16% entstehen, die durch Hinzunahme der zweiten Zwischenräume um $3, 3$ und 6% erhöht werden können (der Volumanteil der Zwischenräume selbst beträgt 26%). Auf die Anwendung bei der Schichtung von Massen, in der Keramik und bei Einlagerungsmischkristallen wird hingewiesen. Hierfür dürften jedoch nach Ansicht des Ref. die Betrachtungen zu speziell sein. *A. Kochendörfer* (Stuttgart).

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Lemaître, G. et R. van der Borcht: Modèles de nébuleuses à vitesses radiales. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **34**, 955—965 (1948).

Mit dem Ziel einer Darstellung des beobachteten Dichteverlaufs in elliptischen Nebeln werden zwei extrem vereinfachte kugelsymmetrische Modelle studiert mit rein radialen Bewegungen der sie konstituierenden Sterne. *Heckmann*.

Fabre, Hervé: Systèmes dissipatifs quasi permanents dans l'univers céleste. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1399—1400 (1949).

Es wird ein kurzer Bericht gegeben über die Ergebnisse von Untersuchungen an bestimmten Typen quasi-permanenter dynamischer Systeme, und zwar an Hand von Beispielen aus der Astronomie. *H. Vogt* (Heidelberg).

Hoyle, F.: On the cosmological problem. Monthly Not. astron. Soc., London **106**, 365—371 (1949).

Verallgemeinerung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **31**, 383) über kontinuierliche Neuschaffung von Materie im Weltall mit Antwort auf kritische Bemerkungen von Bondi und Gold (dies. Zbl. **31**, 96). Ästhetische Betrachtungen spielen als Argument eine wesentliche Rolle. *Heckmann* (Hamburg).

Schoenberg, Erich: Die äquatoriale Beschleunigung bei Jupiter. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1948**, 115—147 (1949).

Die hier behandelte Frage gehört zum Problem der allgemeinen Zirkulation einer Planetenatmosphäre. Dieses kann für die Erde durchaus noch nicht als gelöst angesehen werden, wie z. B. die Einladung zur Hundertjahrfeier der Royal Meteorological Society, London, zeigt, die für den 30. März d. J. als Vormittagsthema die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre angesetzt hat. Die vorliegende Denkschrift wird also auch jedem Meteorologen eine willkommene Anregung bieten. — Verf. geht von der Annahme einer halbfesten oder flüssigen Oberfläche des Jupiter aus, die in der Konstanz des Großen Roten Flecks und der mittleren Breiten der fünf Hauptstreifen ihre Stütze hat, und entwickelt eine Theorie der größeren Winkelgeschwindigkeit der äquatorialen Zone als einer rein atmosphärischen Strömung. Im Gegensatz zur Erdatmosphäre, die im Mittel am Äquator die stärkste Heizquelle besitzt, wird diese beim Jupiter in nord- bzw. südäquatorialen Banden ca. $+9,5$ und $-7,7$ jovigraphischer Breite angenommen. Hier sollen heiße Dämpfe aufsteigen,

wodurch die äquatorwärts gelegenen Gasmassen zum Nachströmen auf der bereits fest gewordenen Oberfläche veranlaßt werden. Die aufgestiegenen Massen kondensieren, fließen im höheren Niveau zum Äquator und steigen dort unter Verdampfung der Kondensate ab. — Diese Zirkulation wird mit den Hilfsmitteln der heutigen theoretischen Meteorologie untersucht: Zonale Strömung in Luftringen, Erhaltung des Rotationsmomentes, Einfluß der Coriolis-Beschleunigung, Bewegungsgleichungen, Thermodynamik, Reibung und Austausch. — Durch plausible Annahmen über die Dichte der Jupiteratmosphäre gewinnt Verf. zwei Werte des Austauschkoeffizienten, durch welche die theoretisch aus der reibungslosen Bewegung abgeleitete äquatoriale Winkelgeschwindigkeit der wirklich beobachteten nahekommmt. — Gegen die Annahme rein zonaler Zirkulationen, wie sie die von Helmholtzschen Luftringe nahelegen, sind in letzter Zeit begründete Bedenken geltend gemacht worden (Hann-Süring, Lehrbuch der Meteorologie, 5. Aufl., S. 653). Die Nichtzulässigkeit der Verwendung des Satzes von der Erhaltung des Rotationsmomentes für nur ein Massenteilchen hat schon E. Herrmann in der Meteorolog. Z. 11, 114—117 (1894) nachgewiesen. Sie ist a. a. O. 59, 353 (1942) dort nochmals erörtert worden. Die Erklärung des Verf. der uns sichtbaren Erscheinungen in der Jupiteratmosphäre umfaßt bisher nur die äquatornahen Gebiete, eine Ausdehnung auf die gesamte Gashülle des Planeten ist also ein natürliches wissenschaftliches Bedürfnis. Um hier weiterzukommen, würde es sich vielleicht lohnen, die Frage zu beantworten, zu welchen Erscheinungen die allgemeine Zirkulation in der Atmosphäre der Erde bei Erhaltung der bisherigen tellurischen und astronomischen Bedingungen, aber bei Ersatz durch die Jupitergröße führen würde. *B. Neis (Berlin).*

Berljand, M. E.: Über die Änderung der Temperatur in der erdnahen Luftschicht mit der Zeit und die Transformation der Luftmassen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 1017—1020 (1949) [Russisch].

Zunächst schreibt Verf. die beiden Differentialgleichungen für den Wärmehaushalt der bodennahen Luftschicht und des Erdbodens mit den dazugehörigen Randbedingungen hin. Dann sucht er funktionentheoretisch die Kriterien für eine eindeutige Lösung auf und entwickelt anschließend aus ihnen ein System von gewöhnlichen nichthomogenen Differentialgleichungen mit den entsprechenden Randbedingungen. Mit Hilfe der Theorie der Funktionen komplexen Arguments wird schließlich ein Ausdruck für den zeitlichen Gang der Temperatur der bodennahen Luftschicht gefunden. Der theoretische Verlauf wird durch die Messungen bestätigt. Die Anwendung des hier gebrauchten Schlußverfahrens ist jedoch, wie A. Sommerfeld in seinen Vorlesungen über theoretische Physik, Band II, S. 142 (II. Aufl., Leipzig 1949) auseinandersetzt, im allgemeinen auf zweidimensionale Probleme beschränkt. *B. Neis (Berlin).*

McCracken, Leslie G.: A note on the ionospheric absorption problem. J. appl. Physics, Lancaster Pa. 20, 229—230 (1949).

Für den Reflexionskoeffizienten ρ (= Maß für die Absorption) haben Appleton und dann Best und Ratcliffe 1937/38 Formeln abgeleitet unter der Voraussetzung, daß die Wellenfrequenz groß ist gegen die Stoßfrequenz der Elektronen. Bei geeigneter Wahl der eingehenden Konstanten sind diese beiden Formeln identisch; sie ergeben $\ln \rho$ proportional mit $(\cos \chi)^{3/2}$, wo χ die Zenitdistanz der Sonne ist. In der vorliegenden Note leitet Verf. unter derselben Voraussetzung, jedoch ohne sonstige Vernachlässigungen, eine Formel für $\ln \rho$ ab. Er findet ebenfalls Proportionalität mit $(\cos \chi)^{3/2}$, jedoch noch einen Zusatzfaktor in Gestalt einer $\cos \chi$ enthaltenden unvollständigen Γ -Funktion. Für große Zenithabstände geht seine Formel in die der genannten Autoren über. (Die Arbeit ist überholt durch eine kürzlich in derselben Zeitschrift erschienene Note von Bracewell und Weekes, die auf Rechenfehler bei McCracken hinweisen und die Wahl der Integrationsgrenzen bei der Integration über die Schicht diskutieren). *R. Seeliger (Greifswald).*